1 Uitgewerkte opgaven: relativistische kinematica

1. **Impuls van een π^+ meson**

   Opgave: Een π^+ heeft een kinetische energie van 200 MeV. Bereken de impuls in MeV/c.

   Antwoord: Een π^+ meson heeft een massa $m_{\pi^\pm} = 139.6$ MeV/c^2 (gegeven) en een kinetische energie van 200 MeV. De totale energie E is dus $E = m_{\pi^\pm}c^2 + T = 339.6$ MeV. De bijbehorende impuls p volgt uit $(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$, en dus vinden we $p = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}/\mathrm{c} = 309.6$ MeV/c.

2. **Impuls van een proton.**

   Opgave: Een proton heeft een impuls van 5 MeV/c. Bereken de kinetische energie in MeV.

   Antwoord: De proton massa is $m_p = 938.3$ MeV/c^2 en de impuls $p = 5$ MeV/c. De kinetische energie T kan zowel niet-relativistisch als relativistisch worden uitgerekend, dat geeft binnen de vereiste precisie hetzelfde resultaat (het verschil is slechts 7×10^{-6}).

   - Niet-relativistisch: $T = \frac{p^2}{2m_p} = 13.3$ keV.
   - Relativistisch: $T = E - m_pc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_pc^2)^2} - m_pc^2 = 13.3$ keV.

3. **Muon verval**

   Opgave: Welke afstand legt een bundel muonen in vacuüm af met een kinetische energie van (a) 1 MeV, (b) 100 GeV, voordat de intensiteit met een factor twee gereduceerd is?

   Antwoord: Om de afstand, die een muon in het laboratoriumsysteem aflegt, uit te kunnen rekenen gebruiken we de speciale relativiteitstheorie: de tijd die in het laboratorium systeem verstrijkt is

   $$\Delta t' = \gamma \Delta t, \quad \text{met} \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \quad \text{en} \quad \beta = v/c. \tag{1}$$

   In het rustsysteem vervallen de muonen volgens

   $$I(t) = I(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \tag{2}$$

   De intensiteit op tijdstip t is gereduceerd tot de helft als geldt $t - t_0 = \ln(2) * \tau$. Gegeven is dat de levensduur van muonen gelijk is aan $\tau_\mu = 2.197$ μs.

   Verder hebben we $\gamma = \frac{E}{m_\mu c^2}$, met E (m_μ) de energie (massa) van het muon. In het laboratoriumsysteem verstrijkt een tijd $\Delta t' = \gamma \Delta t$ voordat de helft van de muonen is vervallen. De muonen hebben snelheid $v = \beta c$.

   Voor een muon met 1 MeV kinetische energie (gegeven is $m_\mu = 105.7$ MeV/c^2) geldt:

   $$\gamma = E/m_\mu c^2 = 106.7/105.7 = 1.00946 \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{1}{1-\gamma^2}} = 0.137 \rightarrow \Delta t' = 1.537\times10^{-6} \text{ s.} \tag{3}$$

De gevraagde afstand bedraagt dus $d = \beta c \Delta t' = 63$ m.

Voor een muon met 100 GeV kinetische energie geeft deze berekening:

$$\gamma = 947.07 \rightarrow \beta = 1.0000 \rightarrow d = \beta c \Delta t' = 433 \text{ km}. \tag{4}$$

4. **Pion verval**

   Opgave: Als vorige opgave, maar nu voor geladen en neutrale pionen.

   Antwoord: De uitwerking is analoog aan opgave 3, maar nu geldt: $m_{\pi^\pm} = 139.6$ MeV/c^2, $\tau_{\pi^\pm} = 2.60 \times 10^{-8}$s; $m_{\pi^0} = 135.0$ MeV/c^2, $\tau_{\pi^0} = 8.4 \times 10^{-17}$s. Dit geeft de volgende resultaten:

$$\begin{array}{llllll} \pi^\pm: & T = 1 \text{ MeV} & \text{impliceert} & \gamma = 1.0072, & \beta = 0.119, & d = 0.64 \text{ m}, \\ & T = 100 \text{ MeV} & \text{impliceert} & \gamma = 717.3, & \beta = 1.000, & d = 3878 \text{ m}, \\ & & & & & \\ \pi^0 & T = 1 \text{ MeV} & \text{impliceert} & \gamma = 1.0074, & \beta = 0.121, & d = 2.1 \times 10^{-9} \text{ m}, \\ & T = 100 \text{ MeV} & \text{impliceert} & \gamma = 741.7, & \beta = 1.000, & d = 1.86\ \mu\text{m}. \end{array} \tag{5}$$

5. **Tijddilatatie**

   Opgave: Een positief kaon (K^+) heeft, gemiddeld, een levensduur van 0.1237 μs als het in rust is, dit wil zeggen als de levensduur gemeten wordt in het *rustsysteem* van het kaon. Indien positieve kaonen met een snelheid van $0.990c$ relatief ten opzichte van een laboratorium referentiesysteem worden geproduceerd, welke afstand kunnen ze dan gedurende hun levensduur in dat systeem afleggen?

   Antwoord: In het laboratoriumsysteem is de afstand d die het K^+ aflegt gerelateerd aan zijn snelheid v ($= 0.990c$) en de reistijd Δt_k volgens $d = v\Delta t_k$. Deze uitspraak heeft niets te maken met relativiteitstheorie, omdat alle grootheden gemeten worden in hetzelfde inertiaalsysteem.

   In het laboratorium referentiesysteem hebben we te maken met de gedilateerde tijd Δt en deze is gerelateerd aan de eigentijd Δt_0 volgens

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{0.1237 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0.990c/c)^2}} = 8.769 \times 10^{-7} \text{ s}. \tag{6}$$

   Dit is ongeveer zeven keer langer dan de levensduur van het K^+ in eigentijd. De berekening vereist toepassing van de relativiteitstheorie, omdat we data dienen te transformeren van het rustsysteem van het deeltje naar het laboratoriumsysteem.

   We vinden nu de afgelegde weg van het deeltje in het laboratoriumsysteem uit

$$\begin{aligned} d &= v\Delta t_k = v\Delta t \\ &= (0.990)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(8.769 \times 10^{-7} \text{ s}) \\ &= 260 \text{ m} \end{aligned} \tag{7}$$

   Dergelijke metingen verifiëren de speciale relativiteitstheorie en zijn tegenwoordig routine in subatomaire fysica experimenten.

6. **Collider en Fixed-Target Experimenten**

Opgave: Bij DESY in Hamburg wordt een 6 km lange opslagring gebruikt om de substructuur van het proton te onderzoeken in collider experimenten. In deze ring versnelt men protonen tot 820 GeV, die frontaal botsen met elektronen die tot 35 GeV versneld kunnen worden. Stel, dat men in plaats van een collider experiment een experiment met vaste targets zou gebruiken (de zogenaamde fixed-target experimenten).

Opgave a): Welke energie zou de elektronenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een fixed proton target (waarbij de protonen in rust zijn)?

Antwoord: Het antwoord verkrijgt men het snelst, door een Lorentztransformatie uit te oefenen naar het systeem waarin het proton in rust is. Definieer $\vec{\beta}$ als de snelheid, uitgedrukt in eenheden c ($c = 1$), $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ de Lorentzfactor, en E_p, $\vec{p}_p$ en M_p respectievelijk de energie, impuls, en massa van het proton in het laboratorium (LAB) systeem. Definieer E_e, $\vec{p}_e$, en m_e als respectievelijk de energie, impuls, en massa van het elektron in het LAB-systeem. Er geldt

$$\begin{aligned} |\vec{p}_e| &= \sqrt{E_e^2 - m_e^2} &&= 35 \text{ GeV}, \\ |\vec{p}_p| &= \sqrt{E_p^2 - M_p^2} &&= 820 \text{ GeV}, \\ \gamma &= E_p/M_p &&= 874, \\ \beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} &&= 1.000. \end{aligned} \tag{8}$$

Voor de Lorentztransformatie naar het systeem waarin het proton in rust is, geldt $\gamma = 874$ en $\beta = 1.000$. Voor de Lorentztransformatie van het elektron naar dit systeem krijgen we:

$$E'_e = \gamma(E_e - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_e). \tag{9}$$

De richting van $\vec{\beta}$ en $\vec{p}_e$ zijn 180° tegengesteld, dus volgt $\vec{\beta} \cdot \vec{p}_e = -1.000|\vec{p}_e|$ en E'_e = 61.2 TeV, waarbij 1 TeV = 10^{12} eV.

Opgave b): Welke energie zou de protonenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een target met elektronen dat in rust is?

Antwoord: Het antwoord is geheel analoog aan dat in opgave a. Nu moeten we een Lorentztransformatie maken naar het systeem, waarin het elektron in rust is. Er geldt $\gamma = E_e/m_e = 68493$ en $\beta = 1.000$. De richting van $\vec{\beta}$ gelijk aan die van het elektron, dus $\vec{p}_p \cdot \vec{\beta} = -1.000|\vec{p}_p|$. De Lorentztransformatie voor het proton om in het systeem te komen waarin het elektron in rust is geeft dus

$$E'_p = \gamma(E_p - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_p) = 1.12 \times 10^8 \text{ GeV}. \tag{10}$$

Opgave c): Reken uit wat de relatieve impulsen van de protonen en elektronen zijn in het zwaartepuntssysteem (in dit systeem is de totale drie-impuls gelijk is aan 0).

Antwoord: De invariante massa W van het elektron-proton systeem bedraagt

$$W = \sqrt{(E_e + E_p)^2 - (\vec{p}_e + \vec{p}_p)^2} = \sqrt{855^2 - 785^2} = 338.8 \text{ GeV}. \tag{11}$$

In het zwaartepuntssysteem geldt $\vec{p}'_e = -\vec{p}'_p$. Verder geldt $W = E'_e + E'_p$. De rustmassas van het elektron en het proton kunnen verwaarloosd worden ten opzichte van 338.8 GeV, dus volgt in het zwaartepuntssysteem $E'_e = |p'_e| = E'_p = |p'_p| = 169.4$ GeV (de aanname $M_p = 0$ is correct binnen de precisie waarmee het antwoord gegeven is).

Opgave d): De maximale overdraagbare vierimpuls is gelijk aan 2 maal de proton (of elektron) impuls in dit systeem. Geef de corresponderende golflengte in meters. Dit is een goede maat voor het oplossend vermogen waarmee de structuur van protonen of elektronen gemeten kan worden.

Antwoord: De golflengte van een foton van 338.8 GeV bedraagt

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi\frac{\hbar c}{E} = 2\pi\frac{0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm}}{338.8 \text{ GeV}} = 3.66 \times 10^{-18} \text{ m}. \tag{12}$$

Dit is meer dan tweehonderd keer kleiner dan de straal van het proton.

7. **Maximum energie elektron**

Opgave: Toon aan dat de maximum energie die overgedragen kan worden aan een elektron, in één enkele botsing, door een deeltje met kinetische energie T en massa M ($M \gg m_e$) is $\frac{4m_e}{M}T$.

Antwoord: We beschouwen een botsing van een deeltje met massa M en kinetische energie T op een stationair elektron. Wat is de maximale overdracht van kinetische energie? We zullen dit in zijn algemeenheid afleiden, dus zonder gebruik te maken van de benadering $m_e \ll M$. De maximale overdracht van impuls kan worden gevonden door naar het center-of-mass (COM) systeem te transformeren. In het COM-systeem bewegen beide deeltjes met momentum p_{com} (maar in tegengestelde richtingen), en de maximale overdracht van impuls bedraagt $2p_{\text{com}}$. Energiebehoud geeft

$$\begin{aligned} E^2_{\text{com}} = E^2_{\text{lab}} - p^2_{\text{lab}} &= (T + Mc^2 + m_e c^2)^2 - ((T + Mc^2)^2 - (Mc^2)^2)) \\ &= M^2c^4 + m_e^2c^4 + 2m_e c^2(T + Mc^2). \end{aligned} \tag{13}$$

Een manier om p_{com} te berekenen is de Lorentz-boost van het COM-systeem naar het laboratorium (LAB) systeem uit te voeren. De totale impuls van het COM systeem is 0, dus we kunnen γ berekenen uit $E_{\text{lab}} = \gamma E_{\text{com}}$. We vinden

$$\begin{aligned} \gamma = \tfrac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{com}}} &= \sqrt{\tfrac{(m_e c^2 + Mc^2 + T)^2}{m_e^2c^4 + 2m_e c^2(Mc^2+T) + M^2c^4}} \\ &= \sqrt{1 + \tfrac{2TMc^2 + T^2}{m_e^2c^4 + 2m_e c^2(Mc^2+T) + M^2c^4}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Met de relatie

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{15}$$

kunnen we de impuls van het elektron in het COM-systeem uitrekenen door een Lorentz boost uit te voeren op het (stationaire) elektron in het LAB-systeem:

$$p_{el}^{\text{com}} = -\beta\gamma m_e c. \tag{16}$$

De maximale impuls overdracht wordt gevonden voor een *frontale botsing*: na de botsing zijn de impulsen van het elektron en het deeltje M in het COM-systeem omgekeerd (dus $E_{el}^{\rm com} = \gamma m_e c^2$, en $p_{el}^{\rm com} = +\beta\gamma m_e c$). Terugboosten naar het LAB-systeem geeft

$$E_{el}^{\rm lab} = \gamma^2 m_e c^2 + \beta^2\gamma^2 m_e c^2 = (2\gamma^2 - 1) m_e c^2. \quad (17)$$

De maximale overgedragen energie bedraagt dus

$$E_{el}^{\rm lab} - m_e c^2 = 2(\gamma^2 - 1) m_e c^2 = m_e c^2 \frac{4TMc^2 + 2T^2}{M^2c^4 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 (T + Mc^2)}. \quad (18)$$

In de limiet $m_e \ll M$ en $Tm_e c^2 \ll M^2 c^4$ geeft dit het gevraagde antwoord $T_{el}^{max} \sim 4Tm_e/M$. Voor ultra-relativistische deeltjes ($m_e T \gg M^2 c^2$) geldt $T_{el}^{max} \sim T$.

Voor lage kinetische energieën $T \ll m_e c^2$ kan dit resultaat veel simpeler afgeleid worden in niet-relativistische benadering: voor de verstrooiing geldt $T = P_i^2/2M$, na de verstrooiing geldt $P_f + p_e = P_i$, en $T_f + T_e = T$, met P_f en T_f de impuls en kinetische energie van het deeltje M en p_e en T_e de impuls en kinetische energie van het elektron. Er geldt dan (voor maximale impulsoverdracht)

$$\frac{p_e^2}{2m_e} + \frac{(P_i - p_e)^2}{2M} = \frac{P_i^2}{2M}, \quad (19)$$

waaruit direct volgt dat $p_e^{max} = \frac{2m_e}{m_e + M} P_i$, en (in de limiet $m_e \ll M$) $T_e^{max} = \frac{2m_e}{M} P_i^2 = 4\frac{m_e}{M} T$.

8. **Paarproductie**

   Opgave: Toon aan dat paarproductie, $\gamma \to e^+ e^-$, niet mogelijk is zonder de aanwezigheid van een kern (impulsbehoud).

   Antwoord: De reactie $\gamma \to e^+ + e^-$ is verboden vanwege behoud van energie en impuls. Er geldt $E_\gamma = p_\gamma c$. De totale invariante massa van het foton,

$$W = \sqrt{E_\gamma^2 - p_\gamma^2}, \quad (20)$$

   is gelijk aan 0. Het is niet mogelijk om een totale invariante massa van 0 te creëren met alleen twee leptonen:

$$W = \sqrt{(E_e^- + E_e^+)^2 - (\vec{p_e^-} + \vec{p_e^+})^2 c^2} > 0, \quad (21)$$

   aangezien voor beide leptonen geldt $p_e c < E_e$, en $|\vec{p_e^+} + \vec{p_e^-}| \leq p_e^+ + p_e^-$. Als er een veld aanwezig is, waaraan een gedeelte van de impuls van het foton kan worden overgedragen (b.v. aan het elektromagnetische veld van een kern) kan het verval wel optreden (er moet dus een extra virtueel foton kunnen worden uitgewisseld).

9. **Botsing in zwaartepuntsysteem**

   Opgave: De botsing van twee deeltjes, elk met massa M, wordt bekeken van uit een Lorentz frame waar de deeltjes 'head-on' botsen, met gelijke impulsen, maar met tegenovergestelde richtingen. We noemen dit het zwaartepuntsysteem. De totale energie in het systeem is E_{com}. Laat zien dat de Lorentzinvariant

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E^2_{\mathrm{com}}. \tag{22}$$

Indien we de botsing beschouwen vanuit het laboratorium stelsel, waar een van de deeltjes zich in rust bevindt, laat dan zien door de invariant s uit te rekenen, dat het ander deeltje een energie

$$E_{\mathrm{lab}} = \frac{E^2_{\mathrm{com}}}{2M} - M \tag{23}$$

heeft. We leren van dit resultaat dat de collider-experimenten een enorm voordeel hebben in vergelijking met zogenaamde fixed-target experimenten, in het bereiken van een totale zwaartepuntenergie ($\sqrt{s}$). Noem enkele van de voordelen van een fixed-target experiment.

Antwoord: Er geldt

$$(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p_1} + \vec{p_2})^2 c^2. \tag{24}$$

In het zwaartepuntsysteem geldt

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0, \quad \text{en} \quad E^2_{\mathrm{com}} = (E_1 + E_2)^2. \tag{25}$$

Om E_{lab} uit te rekenen is het het eenvoudigst om het systeem te boosten. In het zwaartepuntsysteem van twee deeltjes met gelijke massa geldt $E_1 = E_2 = E_{\mathrm{com}}/2$. Verder geldt dat $\gamma = E/Mc^2 = E_{\mathrm{com}}/2M$ en $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Het ene deeltje, zeg deeltje 1, staat stil in het lab-systeem. Dit resultaat wordt verkregen door het deeltje een Lorentz-boost langs $\vec{p_1}$ te geven:

$$E_1^{\mathrm{lab}} = \gamma E_1 - \beta\gamma p_1 c = \gamma^2 Mc^2 - \beta^2\gamma^2 Mc^2 = Mc^2, \tag{26}$$

waarin gebruikt gemaakt is van $\beta = pc/E$. De energie van deeltje 2 in het lab-systeem is dus ($\vec{p_2} = -\vec{p_1}$ in het zwaartepuntsysteem)

$$E_2^{\mathrm{lab}} = \gamma E_2 + \beta\gamma p_2 c = (\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)Mc^2 = (2\gamma^2 - 1)Mc^2 = \frac{E^2_{\mathrm{com}}}{2Mc^2} - Mc^2. \tag{27}$$

Merk op, dat in de opgave de factor c^2 weggelaten is. Dat is gebruikelijk in de sub-atomaire fysica: men stelt dat $\frac{h}{2\pi} = c = 1$. Er is dus slechts 1 maat voor lengte, tijd en energie. Men gebruikt bijvoorbeeld de MeV: 1 MeV = 1/197 fm^{-1} = 6.57×10^{-22} Hz. Als men energieën, meters, snelheden etc. in andere eenheden nodig heeft, volstaat het met factoren $\frac{h}{2\pi}$ en c te vermenigvuldigen, in de relevante grootheid uitgedrukt.

Drie belangrijke voordelen van een fixed-target experiment zijn:

- Een hoge target dichtheid kan worden behaald, in alle gevallen vele malen hoger dan de deeltjesdichtheid per oppervlakte eenheid in een bundel.

- Men kan gepolariseerde targets gebruiken om de spin afhankelijkheid van de de interactie te onderzoeken. Het is erg moeilijk om een gepolariseerde hoog-energetische ($\gg 1$ GeV) proton of deuteron bundel te creëren, zeker als men de richting van de spin vrij wil kunnen kiezen.
- Vanwege de Lorentz boost van de deeltjes in de eindtoestand, kan vaak volstaan worden met een detectiesysteem met een relatief kleine ruimtehoek-acceptatie.

10. **Mandelstam variabelen**

Opgave: Voor een verstrooiingsproces van het type $A + B \to C + D$ verwachten we twee onafhankelijke kinematische variabelen, bijvoorbeeld de bundelenergie en de verstrooiingshoek. Het is echter mogelijk, en verdient bovendien de voorkeur, om de werkzame doorsnede uit te drukken in variabelen die invariant zijn onder Lorentz-transformaties. We hebben de vier-vectoren van de deeltjes tot onze beschikking en het is dus mogelijk om de invariante scalar producten $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$, en $p_A \cdot p_C$ te vormen. Omdat $p_i^2 = m_i^2$ en $p_A + p_B = p_C + p_D$ vanwege energie-impulsbehoud, zijn enkel twee van de variabelen onafhankelijk. Het is conventie de volgende variabelen te gebruiken (Mandelstam variabelen)

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - p_C)^2, \\ u &= (p_A - p_D)^2, \end{aligned} \tag{28}$$

Toon aan dat

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \tag{29}$$

Antwoord: We hebben

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad \text{en} \quad u = (p_a - p_d)^2. \tag{30}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} s + t + u &= (3p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 + 2p_a p_b - 2p_a p_c - 2p_a p_d) \\ &= c^4(3m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) + 2p_a(p_b - p_c - p_d). \end{aligned} \tag{31}$$

Door gebruik te maken van de wet van behoud van impuls ($p_b = p_c + p_d - p_a$) vindt men hieruit direct $s + t + u = c^4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$.

11. **Delta Resonantie**

In een experiment onderzoekt men de Δ resonantie door protonen te exciteren met een elektronenbundel. Elektronen met een energie van 1 GeV worden verstrooid aan een waterstof target (in het laboratoriumsysteem is de drie-impuls van de protonen verwaarloosbaar klein). In het verstrooiingsproces wordt een drie-impuls van 500 MeV/c overgedragen.

Opgave a): In de reactie wordt een Δ met een invariante massa van 1232 MeV geproduceerd. Reken uit wat de hoeken van het elektron en van het Δ-deeltje zijn.

Antwoord: De energie van het inkomende elektron $E_i = 1$ GeV. De drie-impuls q is 500 MeV. De invariante massa van de geproduceerde Δ bedraagt $W_\Delta = 1232$ MeV.

Reken eerst de energie overdracht ν van het elektron aan het proton uit. In het LAB-systeem beweegt de Δ met een impuls $p_\Delta = q = 500$ MeV, dus de energie van de Δ in het LAB-systeem is gelijk aan $E_\Delta = \sqrt{W_\Delta^2 + p_\Delta^2} = 1329.6$ MeV. Vanwege de wet van behoud van energie geldt $\nu = E_i - E_f = W_\Delta - M_p = 391.3$ MeV. Hieruit volgt de energie van het verstrooide elektron, $E_f = 608.7$ MeV.

De hoeken van het elektron en de Δ volgen uit de cosinusregel,

$$\cos\theta_e = \frac{E_i^2 + E_f^2 - q^2}{2E_iE_f} = 23.0^\circ, \tag{32}$$

$$\cos\theta_\Delta = \frac{E_i^2 - E_f^2 + q^2}{2E_iq} = 28.4^\circ. \tag{33}$$

Opgave b): De Δ resonantie heeft een zeer korte levensduur; bereken deze in seconden uit de gemeten lijnbreedte van $\Gamma = 112$ MeV van deze resonantie.

Antwoord: De levensduur $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$ is gelijk aan $\tau = 5.9 \times 10^{-24}$s. Een pion dat met de lichtsnelheid vliegt kan in deze tijd ongeveer 1.7 fm afleggen, wat ongeveer gelijk is aan de diameter van het proton.

Opgave c): Veel Δ's vervallen in een proton en een π^0. Reken voor de kinematiek gegeven in opgave 2a uit, wat de minimale en maximale energie is die het proton in het laboratoriumsysteem kan hebben na dit verval. Neem aan dat het proton een willekeurige hoek kan hebben in het zwaartepuntssysteem van de Δ. Reken ook de maximale hoek uit waaronder men protonen uit dit verval kan detecteren in het laboratoriumsysteem. Laat zien, dat de pionen in het laboratoriumsysteem een willekeurige hoek in de ruimte kunnen hebben.

Antwoord: In het zwaartepuntssysteem van de Δ geldt, dat het proton en het pion gelijke impulsen met tegengestelde richting hebben: $\vec{p}_{prot} = -\vec{p}_\pi$, $|\vec{p}_{prot}| = p$. Uit de wet van behoud van energie volgt $W_\Delta = \sqrt{p^2 + M_p^2} + \sqrt{p^2 + m_\pi^2}$. Hieruit is p op te lossen:

$$(W_\Delta - \sqrt{p^2 + M_p^2})^2 = p^2 + m_\pi^2 \Longrightarrow \sqrt{p^2 + M_p^2} = \frac{-m_\pi^2 + M_p^2 + W_\Delta^2}{2W_\Delta} \tag{34}$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{M_p^2 + W_\Delta^2 - m_\pi^2}{2W_\Delta}\right)^2 - M_p^2} = 229 \text{ MeV}. \tag{35}$$

Nu kan men de maximale en minimale protonenergie vinden door een Lorentztransformatie te maken van het zwaartepuntssysteem van de Δ naar het LAB-systeem.

De energie van het proton in het zwaartepuntssysteem bedraagt 965.8 MeV. In het LAB-systeem verplaatst de Δ zich met een impuls van 500 MeV en een energie van $M_p + \nu = 1330$ MeV (zie opgave 2a). Dus volgt voor de Lorentztransformatie $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_\Delta}{E_\Delta} = 0.376$, en $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}(= \frac{E_\Delta}{W_\Delta}) = 1.079$.

De Lorentztransformatie geeft als minimale en maximale protonimpuls in het LAB-systeem

$$\vec{p}_{lab} = \gamma\vec{p} - \vec{\beta}\gamma E_{cm}, \tag{36}$$

waarbij het minimum wordt bereikt als de hoek tussen $\vec{\beta}$ en $\vec{p}$ gelijk is aan 0°, en het maximum voor 180°. De minimale impuls bedraagt +145 MeV (parallel aan $\vec{q}$); de maximale impuls bedraagt +639 MeV (parallel aan $\vec{q}$). Dus de proton energie in het LAB-systeem ligt tussen de 949 en de 1135 MeV.

Om de maximale hoek uit te rekenen die het proton in het LAB-systeem kan bereiken, is het handig de maximale hoek ten opzichte van de impulsoverdracht $\vec{q}$ te berekenen. De component loodrecht op $\vec{q}$ bedraagt $\sin\theta_{cm} p$, en de component parallel aan $\vec{q}$ bedraagt

$$\gamma p_{cm}\cos\theta_{cm} - \beta\gamma E_{cm}. \tag{37}$$

Aangezien de parallelle component in het LAB-systeem altijd positief is, geldt dat de hoek tussen de proton impuls en $\vec{q}$ altijd kleiner is dan 90°. De maximale hoek θ wordt bereikt voor de maximale waarde van

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta_{cm} p}{\gamma p_{cm}\cos\theta_{cm} - \beta\gamma E_{cm}}. \tag{38}$$

Dit maximum is gegeven door de vergelijking te differentiëren naar θ_{cm}; dit geeft

$$\gamma p^2 - \beta\gamma p E_{cm}\cos\theta_{cm} = 0. \tag{39}$$

Hieruit volgt

$$\cos\theta_{cm} = \frac{p}{\beta E_{cm}} = 0.6305 \tag{40}$$

en $\theta_{cm} = 50.9°$. Voor de hoek tussen de impuls van het proton en $\vec{q}$ in het LAB-systeem volgt dan dat deze gelijk is aan 37.1°. Dus de protonen kunnen een maximale hoek van 37.1°+28.4° = 65.5° bereiken.

De hoek voor het pion tussen $\vec{q}$ en de pionimpuls kan ook uitgerekend worden uit de Lorentztransformatie. Voor het pion geldt $E_{cm} = 265.8$ MeV. De component van de pion impuls parallel aan $\vec{q}$ in het LAB-systeem is gegeven door $p_\pi^{lab} = \gamma p - \beta\gamma E_{cm}$. Nu varieert de parallelle component aan $\vec{q}$ tussen + 285.6 MeV en -69.9 MeV, dus tussen parallel en anti-parallel aan $\vec{q}$. De hoek tussen het pion impuls en $\vec{q}$ kan daarom elke waarde tussen 0 en 180° bedragen, zodat de pionen onder iedere willekeurige hoek in het LAB-systeem kunnen worden aangetroffen.

12. **Levensduur van opgeslagen elektronen**

Een opslagring voor elektronen wordt gebruikt om kernfysische metingen uit te voeren. De energie van de elektronen bedraagt 500 MeV. De ring wordt zo goed mogelijk vacuüm gepompt om verlies van elektronen door Møller scattering (dat is elastische verstrooiing van elektronen aan elektronen) aan het restgas tegen te gaan.

Opgave a): Neem aan dat de snelheid van de elektronen in het restgas verwaarloosbaar is. Onder welke hoek worden de elektronen verstrooid, als ze gelijke energie hebben na de verstrooiing?

Antwoord: Het eenvoudigste is dit te berekenen door weer naar het zwaartepuntssysteem te gaan. De invariante massa van het twee-elektron systeem bedraagt

$$W = \sqrt{(e+m)^2 - p^2} = \sqrt{2m(e+m)} = 22.62 \text{ MeV}, \tag{41}$$

met e de energie van het elektron in de bundel (500 MeV), p de impuls van dit elektron ($p = \sqrt{e^2 - m^2}$) en m de massa van het elektron. In het zwaartepuntssysteem hebben beide elektronen dezelfde energie en tegengestelde impuls. Ieder elektron heeft dus een energie E_{cm} van 11.31 MeV en een impuls p_{cm} van 11.30 MeV. Om de Lorentztransformatie van het zwaartepuntssysteem naar het LAB-systeem te maken neemt men $\gamma = E/m = 22.13$ en $\beta = 0.999$, met de richting van $\vec{\beta}$ parallel aan de bundelas.

De elektronen hebben in het LAB-systeem gelijke energie als in het zwaartepuntssysteem de verstrooiing plaatsvindt onder 90°. Dan geldt in het zwaartepuntssysteem dat $\vec{\beta} \cdot \vec{p} = 0$ en dus

$$\tan \theta_{lab} = \frac{p_{cm}}{\beta \gamma e_{cm}} = 2.6°.$$

13. **Elektron-proton verstrooiing**

Opgave: Een 10 GeV elektron botst met een proton en verstrooit over een hoek van 10° met een energie van 7 GeV. Bereken de rustenergie W van de teruggestoten hadronische toestand.

Antwoord: Het kwadraat van de overgedragen vier-impuls bedraagt

$$Q^2 \equiv -q^2 = (k - k')^2 = 2EE'(1 - \cos\theta), \tag{42}$$

waarbij E (k) en E' (k') de energieën (vier-impulsen) zijn van respectievelijk het inkomende en verstrooide elektron, en θ is de verstrooiingshoek. We hebben hier de massa van het elektron verwaarloosd. Verder geldt $\nu = E - E'$. Indien W de massa van de teruggestoten hadronische toestand is, en M de massa van het nucleon, dan geldt

$$\begin{aligned} W^2 = (M + \nu)^2 - \vec{q}^2 & \\ &= M^2 + 2M\nu + \nu^2 - \vec{q}^2 \ rl \\ &= M^2 + 2M\nu - Q^2, \end{aligned} \tag{43}$$

en er geldt dus

$$W^2 = 2M(E - E') + M^2 - Q^2. \tag{44}$$

Als we vervolgens de getallen invullen, dan vinden we

$$Q^2 = 2.127 \text{ GeV/c}^2, \quad W = 2.09 \text{ GeV}. \tag{45}$$

14. **Kosmische Straling**

Het meest energetische proton dat ooit gedetecteerd is in de kosmische straling had de opzienbarende energie van 3.0×10^{20} eV (dat is voldoende energie om een theelepel water een aantal graden op te warmen).

Opgave a): Bereken de Lorentzfactor γ en de snelheid β van het proton.

Antwoord: We gebruiken vergelijking (20) van appendix A en vinden

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{T + mc^2}{mc^2} = \frac{T}{mc^2} + 1 = \frac{3.0 \times 10^{20} \text{ eV}}{938 \times 10^6 \text{ eV}} + 1 = 3.198 \times 10^{11} \approx 3.2 \times 10^{11}. \tag{46}$$

De berekende waarde voor γ is zó groot dat we niet de definitie van γ kunnen gebruiken. Probeer het maar: je rekenmachine zal je vertellen dat β gelijk is aan 1 en dat v dus gelijk is aan c. In feite is v bijna gelijk aan c, maar we zoeken hier een nauwkeurig antwoord. We vinden dit als volgt.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}}, \tag{47}$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat β zo dicht bij 1 is dat $1+\beta$ praktisch gelijk is aan 2. Oplossen naar $1-\beta$ geeft dan

$$1-\beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3.198 \times 10^{11})^2} = 4.9 \times 10^{-24} \approx 5 \times 10^{-24}. \tag{48}$$

Dus hebben we dat $\beta = 1 - 5 \times 10^{-24}$ en omdat $v = \beta c$,

$$v \approx 0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \tag{49}$$

Opgave b): Stel dat het proton langs de diameter (9.8×10^4 lichtjaar) van ons Melkwegstelsel vliegt. Hoe lang duurt de reis van het proton zoals gemeten in ons Aarde-Melkweg referentiesysteem?

Antwoord: We hebben net gezien dat dit *ultrarelativistisch* proton reist met een snelheid die nauwelijks kleiner is dan c. Per definitie doet licht er 9.8×10^4 jaar over om 9.8×10^4 lichtjaar af te leggen, en dit proton dient hier ongeveer even lang over te doen. Dus gezien vanuit ons Aarde - Melkweg referentiesysteem duurt de reis

$$\Delta t = 9.8 \times 10^4 \text{ jaar}. \tag{50}$$

Opgave c): Hoelang duurt de reis van het proton zoals gemeten in het rustsysteem van het proton?

Antwoord: Omdat zowel het begin als het einde van de reis plaatsvinden op dezelfde plaats in het rustsysteem van het proton (en het tijdverschil dus met één enkele klok gemeten kan worden), zoeken we nu de eigentijd van de reis. We gebruiken de tijddilatatie vergelijking en transformeren Δt van het Aarde - Melkweg systeem naar het rustsysteem van het proton,

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9.8 \times 10^4 \text{ jaar}}{3.198 \times 10^{11}} = 3.06 \times 10^{-7} \text{ jaar} = 9.7 \text{ s}. \tag{51}$$

In ons referentiesysteem duurt de reis 98,000 jaar, terwijl in het rustsysteem van het proton slechts 9.7 s verstrijken!