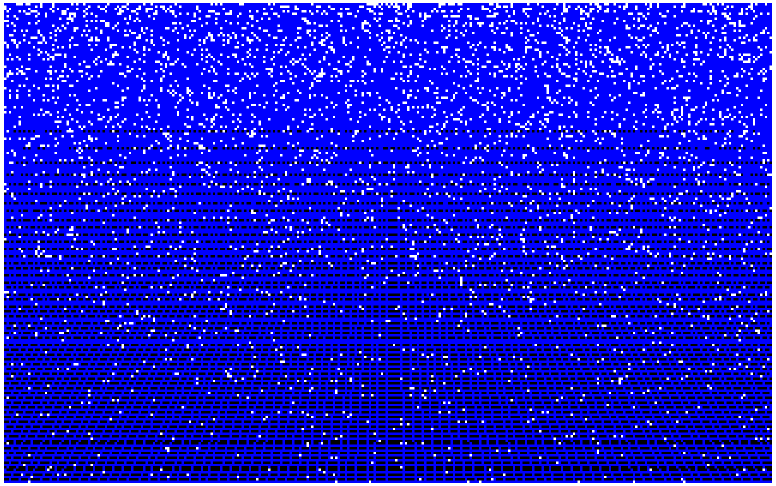
Elementaire Deeltjesfysica

FEW Cursus



Jo van den Brand & Tjonnie Li

1 December, 2009

Structuur der Materie

Inhoud

- Inleiding
  - Deeltjes
  - Interacties
- Relativistische kinematica
  - Lorentz transformaties
  - Viervectoren
  - Energie en impuls
- Symmetrieën
  - Behoudwetten
  - Discrete symmetrieën
- Feynman berekeningen
  - Gouden regel
  - Feynman regels
  - Diagrammen
- Elektrodynamica
  - Diracvergelijking
  - Werkzame doorsneden
- Quarks en hadronen
  - Elektron-quark interacties
  - Hadron productie in e^+e^-
- Zwakke wisselwerking
  - Muon verval
  - Unificatie

Klein – Gordon vergelijking

Beschrijving van deeltjes in klassieke quantummechanica

Schrödingervergelijking: klassieke quantummechanica

Relativistische quantummechanica

Klein – Gordon vergelijking: spin 0

Schrödingervergelijking $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E$ en $\mathbf{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla, \qquad E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}}$$

Klein – Gordon vergelijking $E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4$ of $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0$

met $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$

$$p_\mu \longrightarrow i\hbar\,\partial_\mu$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\Rightarrow -\hbar^2\,\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0$$

En dus $\boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi}$

KG is 2e orde DV: $\psi, \partial_t\psi$

Diracvergelijking

Relativistische quantummechanica

Dirac vergelijking: spin ½

Factoriseer $\boxed{p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0}$ (deeltje in rust: $(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) - 0$

$(p^0 - mc) = 0$ of $(p^0 + mc) = 0$ ⇒ $\boxed{p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0}$

Als deeltje beweegt probeer

$$\boxed{(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)}$$

$$\boxed{\beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \cancel{- mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa} - m^2c^2}$$

$$\boxed{p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}$$

Kies $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ om kruistermen te vermijden

$$\begin{aligned}(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = {} & (\gamma^0)^2(p^0)^2 + (\gamma^1)^2(p^1)^2 + (\gamma^2)^2(p^2)^2 \\ & + (\gamma^3)^2(p^3)^2 + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p_0p_1 \\ & + (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)p_0p_2 + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p_0p_3 \\ & + (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)p_1p_2 + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p_1p_3 \\ & + (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)p_2p_3\end{aligned}$$

⇒ Stel $\gamma^0 = 1$, $\gamma^1 = i$, etc., dan kruistermen! Probeer matrices …

Diracvergelijking

Zoek matrices waarvoor geldt

$$(\gamma^0)^2 = 1, \qquad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0, \qquad \text{for } \mu \neq \nu$$

Compact geschreven

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}}$$

met anticommutator

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

Bjorken en Drell conventie voor de gamma matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4×4 matrixvergelijking factoriseert

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = \underbrace{(\gamma^\kappa p_\kappa + mc)}(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0$$

$$p_\mu \longrightarrow i\hbar\,\partial_\mu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0}$$

spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Dirac spinoren zijn geen viervectoren

Oplossingen van DV: $\vec{p} = 0$

Eenvoudige oplossing: ψ hangt niet van de plaats af ⇒ impuls gelijk aan nul

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0} \Rightarrow \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

Spinor $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ met *upper* $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ en *lower* componenten $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

Dus $\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \qquad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B$

Met als oplossingen $\psi_A(t) = \underbrace{e^{-i(mc^2/\hbar)t}}_{\boxed{e^{-iEt/\hbar}}}\psi_A(0), \qquad \psi_B(t) = \underbrace{e^{+i(mc^2/\hbar)t}}\psi_B(0)$

Verwachte tijdafhankelijkheid voor deeltje met energie E = mc²

Antideeltje: deeltje met energie E = -mc²?

Oplossingen van DV: $\vec{p} = 0$

De oplossingen ψ_A en ψ_B zijn bispinoren en kunnen dus een deeltje met spin ½ beschrijven

$$\psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

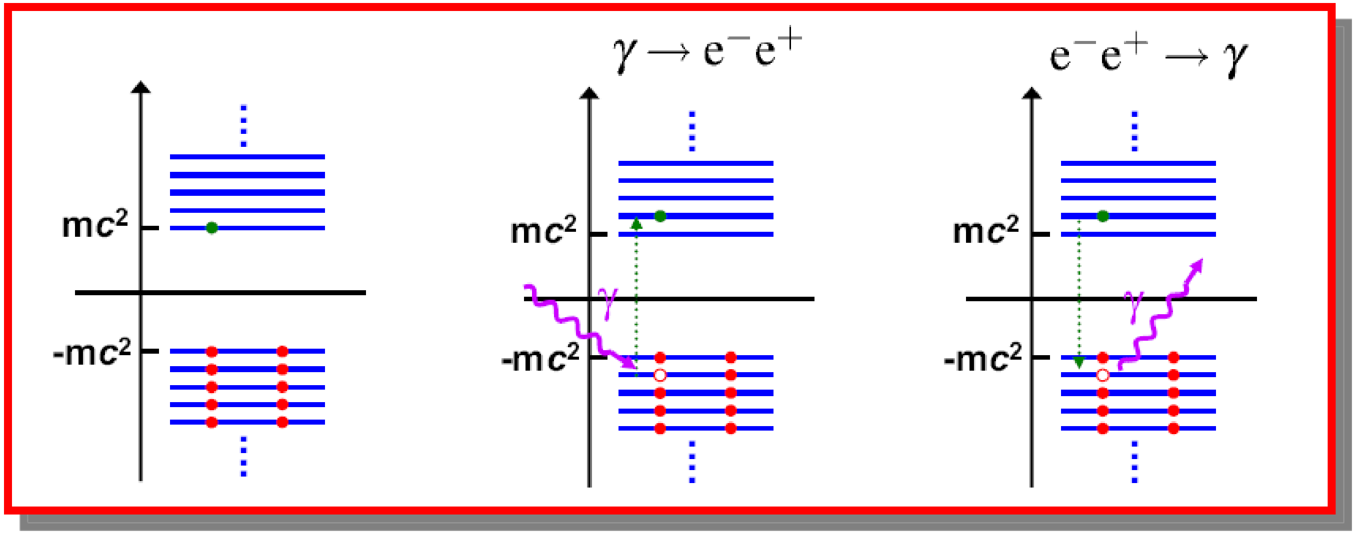
$$\psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Respectievelijk een elektron met spin *up* en spin *down*, en een positron met spin *up* en spin *down.*

Merk op: we mogen geen toestanden weglaten in verband met compleetheid van toestanden!

Dirac zee

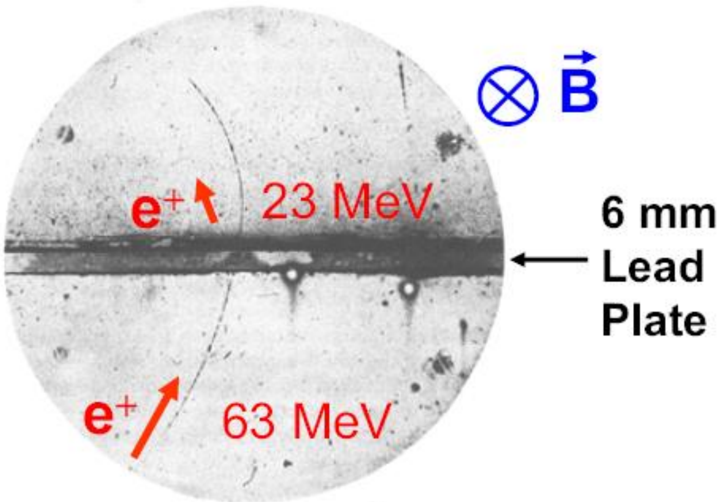
De Dirac vergelijking heeft negatieve energie oplossingen. In tegenstelling tot de Klein Gordon vergelijking hebben deze positieve waarschijnlijkheidsdichtheden. Hoe dienen we deze negatieve energie oplossingen te interpreteren? Waarom vallen niet alle elektronen met positieve energie naar de negatieve energietoestanden?



Diracs interpretatie (1930): het vacuum correspondeert met alle negatieve energietoestanden. Deze toestanden zijn gevuld en het Pauli principe verbiedt verval van elektronen naar deze bezette toestanden. Gaten in de negatieve energietoestanden corresponderen met positieve energie antideeltjes met tegengestelde lading.

Ontdekking van het positron

Kosmisch deeltje in een nevelkamer:

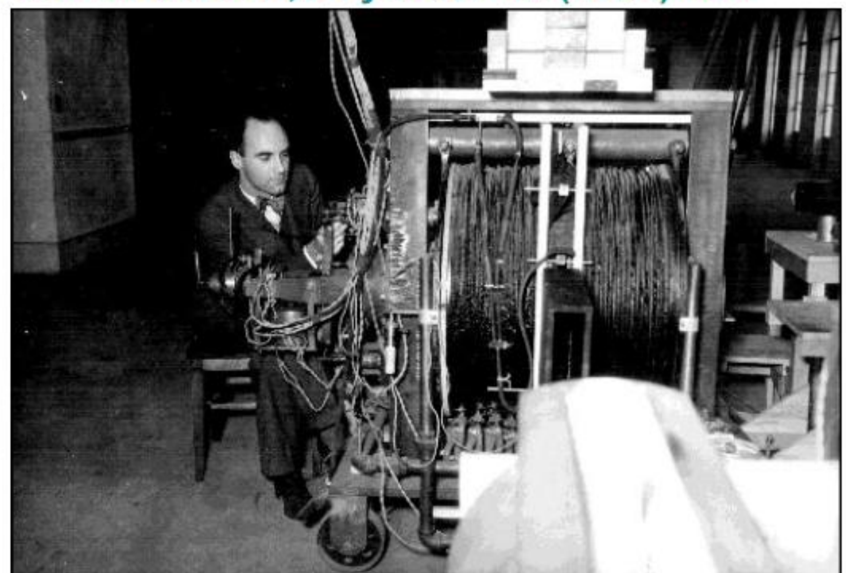


Elektron van beneden vertraagt in de loden plaat (we weten dus de richting)

Kromming in B-veld geeft aan dat het een positief deeltje betreft.

Dit kan geen proton zijn, want protonen worden gestopt in het lood.

C.D.Anderson, Phys Rev 43 (1933) 491



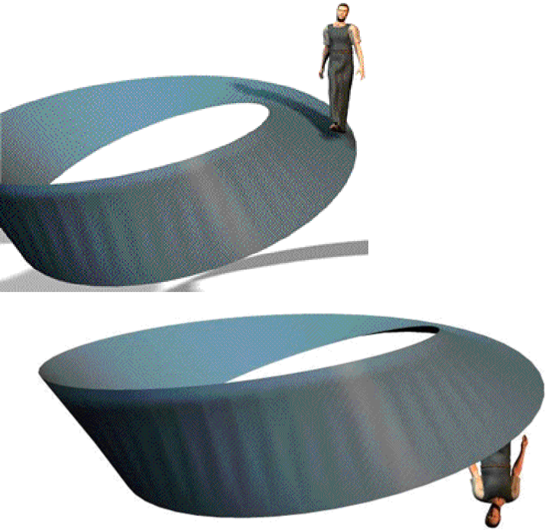
Experimentele bevestiging van de voorspelling van antimaterie door de Dirac vergelijking. Antideeltjes oplossingen zijn een realiteit!

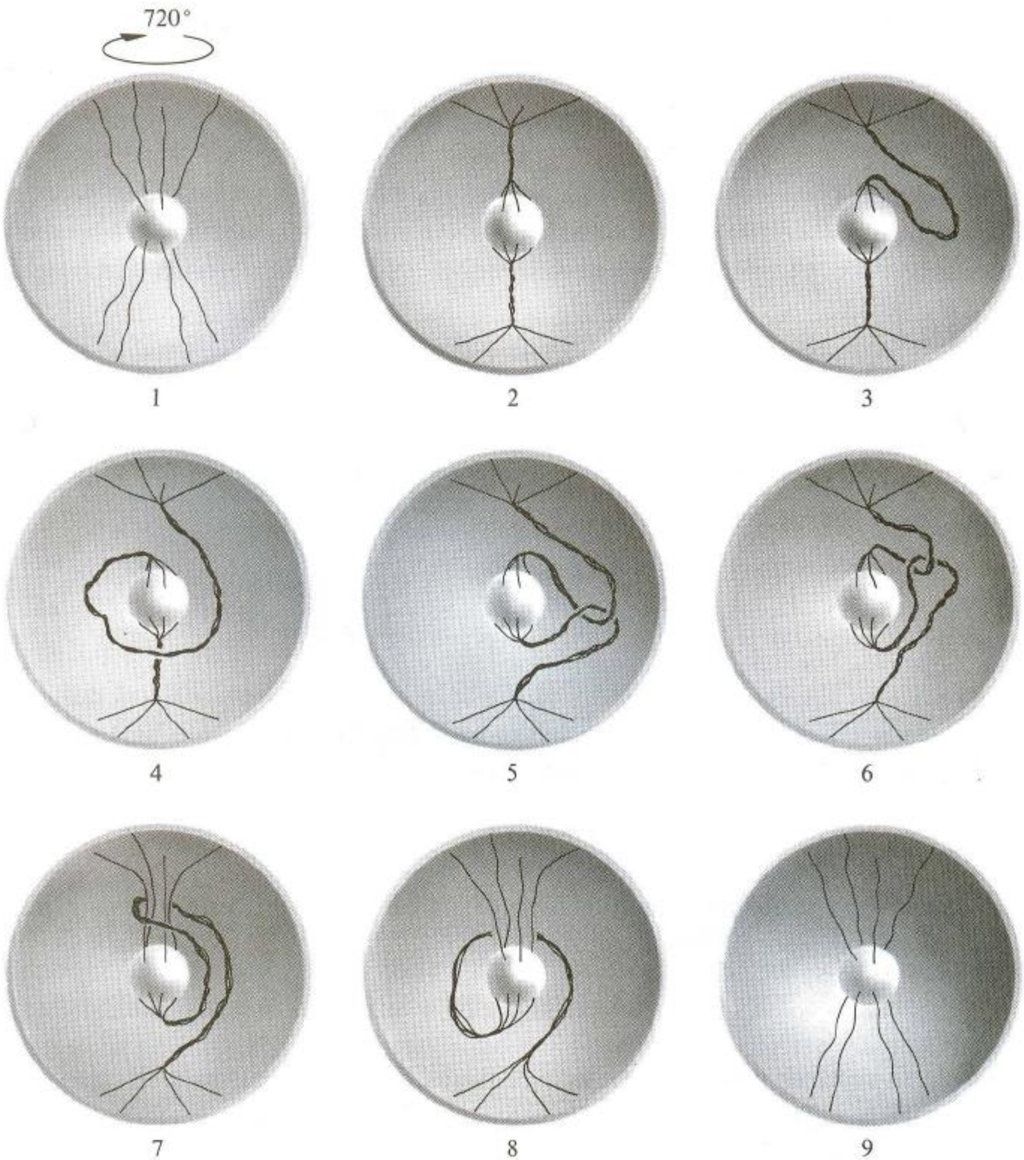
Orientation entanglement relation

Stel een object voor dat met zijn omgeving verbonden is met elastische draden. Een rotatie over 720º leidt niet tot entanglement.

Spinmatrix

$$R = \cos(\theta/2) - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin(\theta/2)$$





MTW

Diracvergelijking in impulsruimte

We zoeken vlakke-golf oplossingen van de vorm $\underbrace{\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{-i/\hbar(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} u(E, \mathbf{p})}$

Identificeer $p \equiv (E/c, \mathbf{p})$ met energie en impuls $\boxed{\psi(x) = a e^{-(i/\hbar)x\cdot p} u(p)}$

Er geldt $\partial_\mu \psi = -\frac{i}{\hbar} p_\mu a e^{-(i/\hbar)x^\mu p_\mu} u$

Normering $\rightarrow a$

Invullen in Diracvergelijking levert

$$\boxed{i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0}$$

$$\gamma^\mu p_\mu a e^{-(i/\hbar)x\cdot p} u - mca e^{-(i/\hbar)x\cdot p} u = 0$$

Diracvergelijking in impulsruimte

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0}$$

Als u hieraan voldoet, dan voldoet ψ aan de Diracvergelijking

Diracvergelijking in impulsruimte

Diracvergelijking in impulsruimte

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0}$$

Er geldt

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} = \frac{E}{c}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \mathbf{p}\cdot\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E/c & -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -E/c\end{pmatrix}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = \begin{pmatrix}\left(\frac{E}{c} - mc\right) & -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \left(-\frac{E}{c} - mc\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_A\\ u_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{E}{c} - mc\right)u_A - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}u_B\\ \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}u_A - \left(\frac{E}{c} + mc\right)u_B\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_B, \qquad u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_A}$$

Invullen levert

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2c^4}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 u_A$$

Diracvergelijking in impulsruimte

We hebben

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2c^4}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 u_A$$

Er geldt

$$\mathbf{p}\cdot\sigma = p_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + p_y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + p_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y)\\ (p_x + ip_y) & -p_z\end{pmatrix}$$

Uitwerken geeft

$$(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y)\\ p_z(p_x + ip_y) - p_z(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2\end{pmatrix} = \mathbf{p}^2$$

$$\Rightarrow \quad u_A = \frac{\mathbf{p}^2c^2}{E^2 - m^2c^4}u_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{E^2 - m^2c^4 = \mathbf{p}^2c^2}$$

Om te voldoen aan de Diracvergelijking moeten *E* en ***p*** voldoen aan energie en impulsbehoud

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

Vlakke-golf oplossingen Diracvergelijking

We hebben

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_B, \qquad u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_A$$

Construeer onafhankelijke oplossingen

$$(1) \quad \text{Pick } u_A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{then } u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_z\\p_x + ip_y\end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \text{Pick } u_A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{then } u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\-p_z\end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \text{Pick } u_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{then } u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2}\begin{pmatrix}p_z\\p_x + ip_y\end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \text{Pick } u_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{then } u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\-p_z\end{pmatrix}$$

Oplossing u_A correspondeert met deeltjes en u_B met antideeltjes

Normering van de spinoren $u^\dagger u = 2|E|/c$ met $u = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} \Rightarrow u^\dagger = (\alpha^*\beta^*\gamma^*\delta^*)$

$$\Rightarrow \quad u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2$$

Vlakke-golf oplossingen Diracvergelijking

We vinden

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \dfrac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \dfrac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

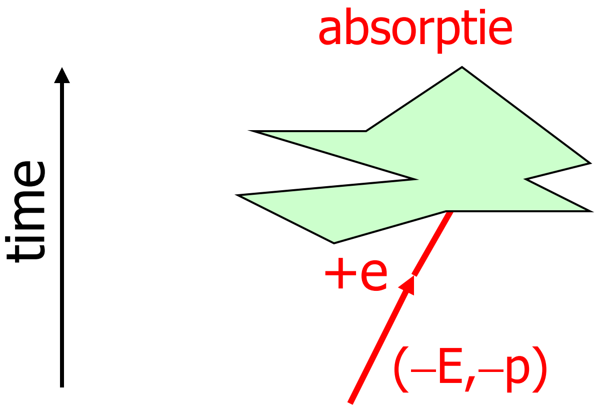
$$u^{(3)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{c(p_z)}{E-mc^2} \\ \dfrac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(4)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \dfrac{c(-p_z)}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E = -\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

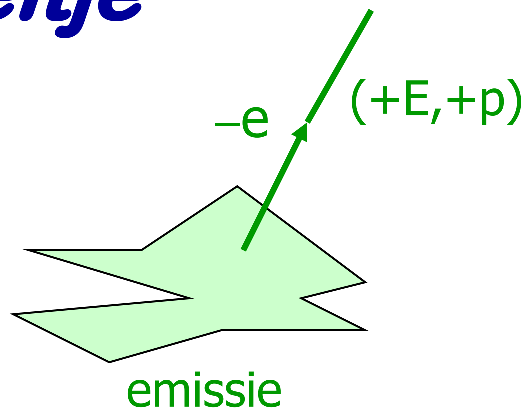
Normering

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c}$$

Deeltje ↔ antideeltje



$$\Delta(\text{systeem}) = \begin{cases} -\vec{p} \\ -E \\ +e \end{cases}$$



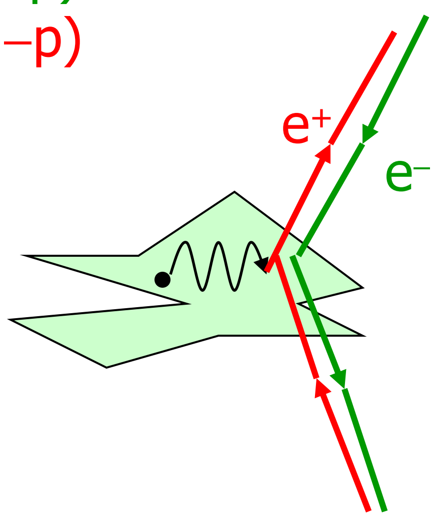
Er geldt $e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$

Voor een systeem is er geen verschil tussen:

Emissie: e^- met $p^\mu = (+\vec{E}, +p)$

Absorptie: e^+ met $p^\mu = (-\vec{E}, -p)$

We herinterpreteren de negatieve energie oplossingen als antideeltjes die terug in de tijd bewegen ($p^\mu \rightarrow -p^\mu$)



Vlakke-golf oplossingen Diracvergelijking

Feynman-Stückelberg interpretatie: ook antideeltjes hebben positieve energie

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{i/\hbar(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} u(-E, -\mathbf{p})$$

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E - mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E - mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

met positieve energie

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

$$v^{(1)}(E, \mathbf{p}) = u^{(4)}(-E, -\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(E, \mathbf{p}) = -u^{(3)}(-E, -\mathbf{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

u's voldoen aan $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$

v's aan $(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$

Spintoestanden

Spin matrices $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$

In het algemeen zijn de spinoren u_1, u_2, v_1 en v_2 geen eigentoestanden van $\hat{S}_z$

$$\boxed{\hat{S}_z = \tfrac{1}{2}\Sigma_z = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Echter deeltjes die in de z-richting bewegen $p_z = \pm|\vec{p}|$

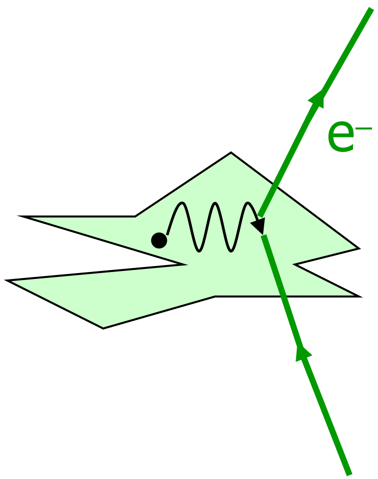
$$u_1 = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_2 = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \end{pmatrix}; \quad v_1 = N\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = N\begin{pmatrix} \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

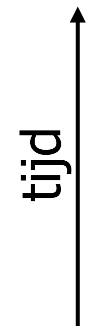
zijn eigentoestanden van $\hat{S}_z$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{S}_z u_1 = +\tfrac{1}{2}u_1 & \hat{S}_z^{(v)} v_1 = -\hat{S}_z v_1 = +\tfrac{1}{2}v_1 \\ \hat{S}_z u_2 = -\tfrac{1}{2}u_2 & \hat{S}_z^{(v)} v_2 = -\hat{S}_z v_2 = -\tfrac{1}{2}v_2 \end{array}}$$

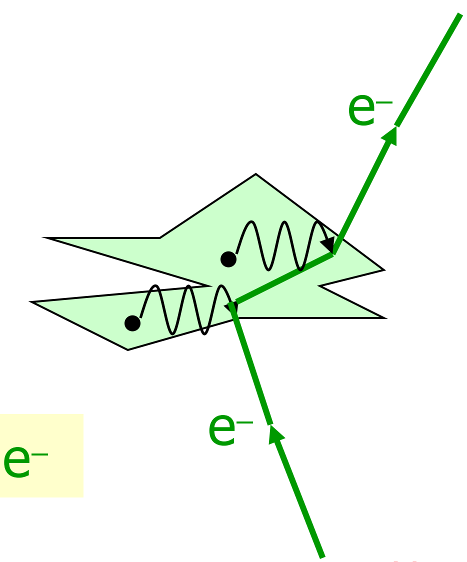
Storingsrekening

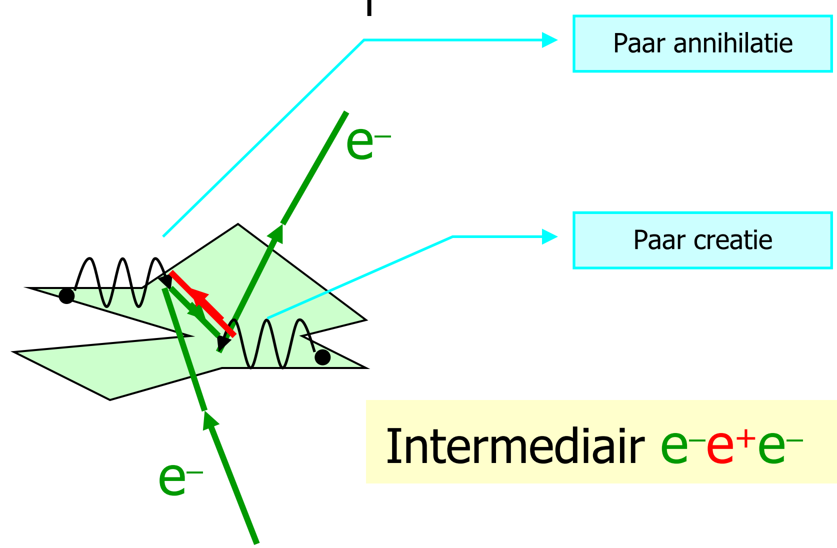
1^e orde:





2^e orde:





Intermediair e^-

Intermediair $e^-e^+e^-$

Vanwege de antideeltjes wordt het vacuum een complex systeem: e^+e^- paren kunnen ontstaan uit het vacuum of erin opgaan.