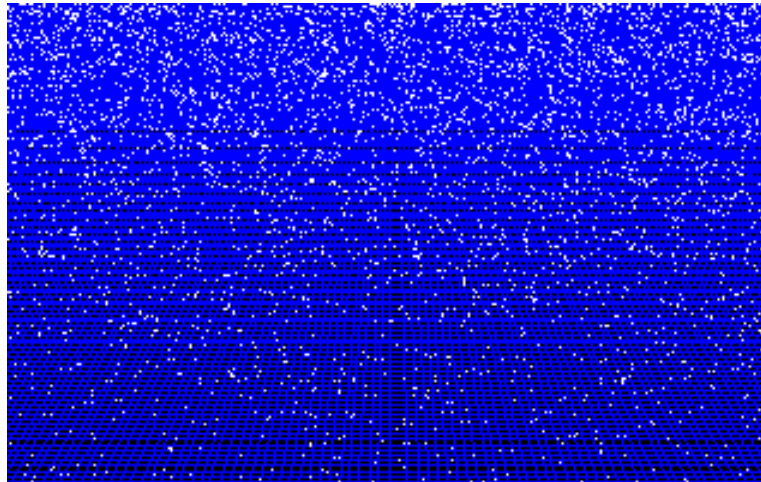


Deeltjes en velden

HOVO Cursus



Jo van den Brand
17 oktober 2013

Overzicht

- **Docent informatie**
 - Jo van den Brand & Gideon Koekoek
 - Email: jo@nikhef.nl en gkoekoek@gmail.com
 - 0620 539 484 / 020 592 2000
- **Rooster informatie**
 - Donderdag 10:00 – 13:00, HG 08A-05 (totaal 10 keer)
 - Collegevrije week: 24 oktober 2013
- **Boek en website**
 - David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley and Sons, ISBN 978-3-527-40601-2 (2008)
 - Zie website URL: www.nikhef.nl/~jo
- **Beoordeling**
 - Huiswerkopgaven 20%, tentamen 80%



Inhoud

- **Inleiding**
 - Deeltjes
 - Interacties
- **Relativistische kinematica**
 - Speciale relativiteitstheorie
 - Viervectoren
 - Energie en impuls
- **Quantumfysica**
 - Formalisme
 - Spin van deeltjes
- **Structuur van hadronen**
- **Symmetrieën**
 - Behoudwetten, quarkmodel
 - Symmetriebreking
- **Veldentheorie**
 - Lagrange formalisme
 - Feynman regels
- **Quantumelektrodynamica**
 - Diracvergelijking
- **Quarks en hadronen**
 - Quantumchromodynamica
- **Elektrozwakke wisselwerking**
- **Higgs formalisme**



Axiomas van de quantummechanica

1. Toestand van een systeem wordt door toestandsfunctie ψ voorgesteld
2. Iedere fysische grootheid correspondeert met een hermitische operator
3. Een toestand van een systeem, waarin een fysische grootheid A een nauwkeurig bepaalde (zogenaamde scherpe) waarde heeft, moet door een eigenfunctie van de corresponderende operator beschreven worden. De waarde van de grootheid A in deze toestand is de bijbehorende eigenwaarde α . Er geldt $\mathbf{A}\psi = \alpha\psi$
4. Als de fysische grootheid A , gekenmerkt door de operator $\mathbf{A}$, voor een systeem dat beschreven wordt door de toestandsfunctie geen scherp bepaalde waarde heeft, dan kan men toch een verwachtingswaarde aangeven, namelijk

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} \psi \rangle = \int \psi^*(x, t) \mathbf{A} \psi(x, t) dx$$

Indien de metingen aan het systeem in dezelfde toestand meerdere malen worden uitgevoerd, dan vindt men voor de gemiddelde waarde van A precies de waarde $\langle A \rangle$.

Axiomas van de quantummechanica

- Wanneer is het resultaat van een meting uniek?

- Beschouw spreiding

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{A})^2 &= \int \psi^* (\mathbf{A} - \langle A \rangle) (\mathbf{A} - \langle A \rangle) \psi d\mathbf{r} \\
 &= \int [(\mathbf{A} - \langle A \rangle) \psi]^* [(\mathbf{A} - \langle A \rangle) \psi] d\mathbf{r} \\
 &= \int |(\mathbf{A} - \langle A \rangle) \psi|^2 d\mathbf{r}.
 \end{aligned}$$

- Uniek resultaat betekent $\Delta \mathbf{A} = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\psi = a\psi \text{ met } \langle A \rangle = a$$

- Als het systeem zich in een eigentoestand bevindt, dan levert een meting als uniek resultaat de eigenwaarde a die hoort bij deze eigentoestand
- Fysische operator heeft een spectrum van eigenwaarden $\mathbf{A}\psi_n = a_n\psi_n$
 - Resultaat van metingen zijn de eigenwaarden a_n
 - Na de meting wordt de toestand beschreven door eigenfunctie ψ_n
 - De eigenfuncties zijn compleet

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \psi_n d\mathbf{r} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$
 - Voor een willekeurige toestand geldt

$$\psi = \sum c_n \psi_n$$

Operatoren van positie en impuls

- Operatoren kunnen niet algemeen afgeleid worden
 - Analogie met klassieke mechanica van Hamilton en Lagrange

- Operator $\mathbf{x}$ voor positie x $\mathbf{x}\psi = x\psi$

- Operator $\mathbf{p}_x$ voor impulscomponent p_x $\mathbf{p}_x\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi$
 - Toestanden met scherpe impuls

$$\mathbf{p}_x\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x\psi \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}$$

- Reële deel is een harmonische golf $\psi_0 \cos \frac{p_x}{\hbar} x = \psi_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$

- Golflengte zoals vereist door de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$

- Definieer golfgetal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\psi = \psi_0 e^{ikx}$$

- Toestand met scherp bepaalde positie, bijvoorbeeld $x = a$ $\mathbf{x}\psi = x\psi = a\psi$
 - Oplossing noemen een delta functie

- Als $\psi(x)$ geen delta-functie $\langle x \rangle = \langle \psi | \mathbf{x} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi^2(x) dx$

- Waarschijnlijkheidsverdeling

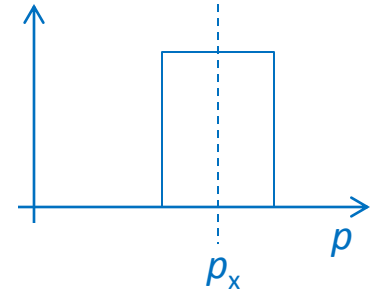
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx$$

Onzekerheidsrelaties

- Beschouw golffunctie

- Superpositie van golven
- Golfpakketje van een deeltje
- Gemiddelde impuls p_x

$$\psi(x) \propto \int_{p_x - \frac{\Delta p_x}{2}}^{p_x + \frac{\Delta p_x}{2}} e^{\frac{ixp}{\hbar}} dp$$



- Er geldt

$$\psi(x) = \frac{\hbar}{ix} e^{\frac{ixp_x}{\hbar}} \left(e^{\frac{ix\Delta p_x}{2\hbar}} - e^{-\frac{ix\Delta p_x}{2\hbar}} \right) = \frac{2\hbar}{x} \sin \frac{x\Delta p_x}{2\hbar} e^{\frac{ixp_x}{\hbar}}$$

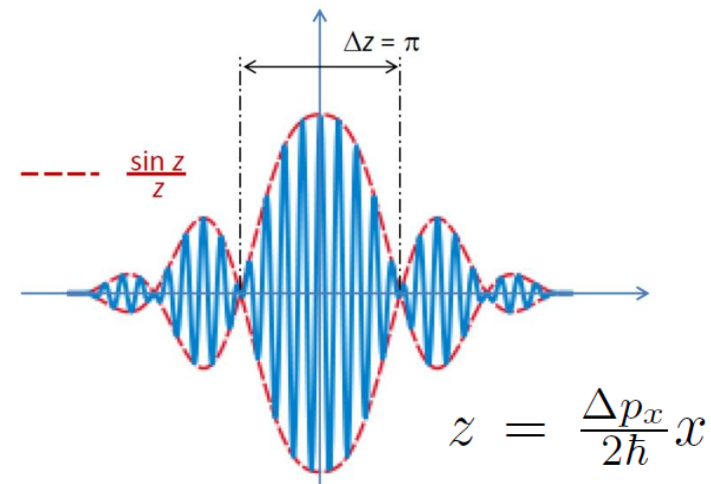
- Voor de breedte geldt

$$\Delta z = \pi, \quad \text{en dus}$$

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x}$$

- Onzekerheidsrelatie van Heisenberg

- Onzekerheid zit ingebouwd in het formalisme



Commutatierelaties

- Laat operatoren voor positie en impuls werken op een functie f

$$\mathbf{p_x x} f = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x f) = \frac{\hbar}{i} \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

- en verwissel de volgorde ...

$$\mathbf{x p_x} f = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial f}{\partial x}$$

- Het verschil bedraagt

$$(\mathbf{p_x x} - \mathbf{x p_x}) f = \frac{\hbar}{i} f$$

- Dit geldt voor elke functie f

- We vinden de operatorvergelijking

$$[\mathbf{p_x}, \mathbf{x}] = \mathbf{p_x x} - \mathbf{x p_x} = \frac{\hbar}{i}$$

- Het is principieel onmogelijk om *geconjugeerde* variabelen tegelijkertijd scherp te bepalen
- Dit geldt ook voor de andere component, voor energie en tijd, voor impulsmoment componenten onderling, etc.
- Voor verdieping zie sectie 3.2.6

$$[\mathbf{E}, \mathbf{t}] = \mathbf{E t} - \mathbf{t E} = i\hbar$$

Schrödingervergelijking



Erwin Schrödinger
1933

- Impulsoperator $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\hbar}{i} \nabla$

- Vectoroperator die een gradiënt neemt

- Operator voor kinetische energie

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

- Laplace-operator $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$

- Operator voor potentiële energie $U(\mathbf{r})$

- Hamiltoniaan $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r})$

- Operator voor totale energie $\mathbf{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

- Operatorvergelijking $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) = \mathbf{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

- Schrödingervergelijking $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t)$

Energieoperator

- Energieoperator $\mathbf{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
- Eigenfuncties $\mathbf{E}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi \implies \psi = \psi_0 e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$
 - Harmonische functies met hoekfrequentie $\omega = \frac{E}{\hbar}$
 - Materie- en lichtgolven met frequentie ν hebben energie $E = h\nu$
- Toestandsfunctie met scherpe energie $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}$
 - Correspondeert met een harmonische trilling op ieder punt in de ruimte
 - Het is een staande golf!
 - Om de golf te karakteriseren, dienen we de ruimtelijke verdeling van de amplitude te weten
- Tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t)$$

- Ook wel

$$\mathbf{H}\phi = E\phi$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r})$$

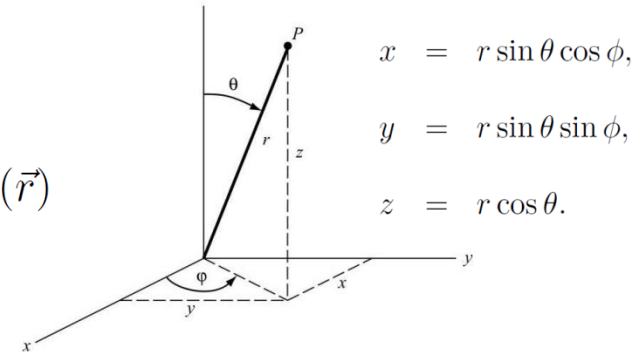
Waterstofatoom

- Schrödingervergelijking $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r})$

- Tijdonafhankelijk $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}$

- Coulombpotentiaal $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$

- Sferische coördinaten



- Operator $\Delta\psi = \nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$

- Dit geeft $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r})$

- Oplossen via scheiden van variabelen

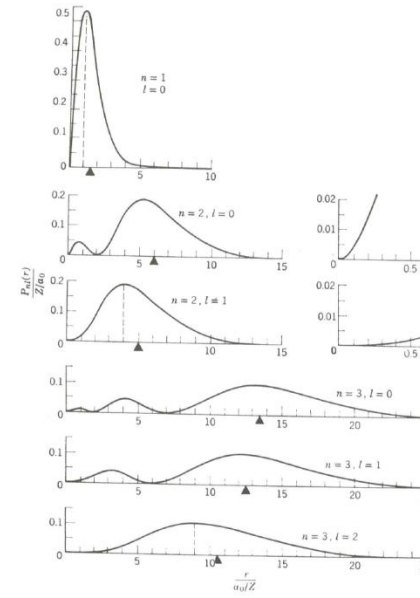
$$\psi(r, \theta, \phi) = \chi(r)g(\theta)h(\phi) = \chi_l(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$



$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

- Dit bevat Laguerre polynomen en sferisch harmonische functies

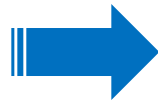
- Quantumgetallen n , l en m



Waterstofatoom

- Energieniveaus

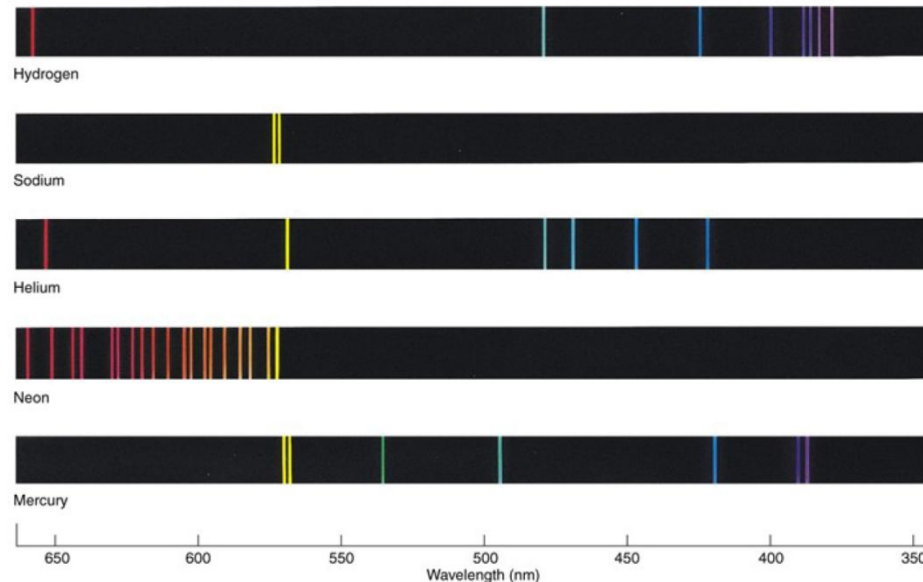
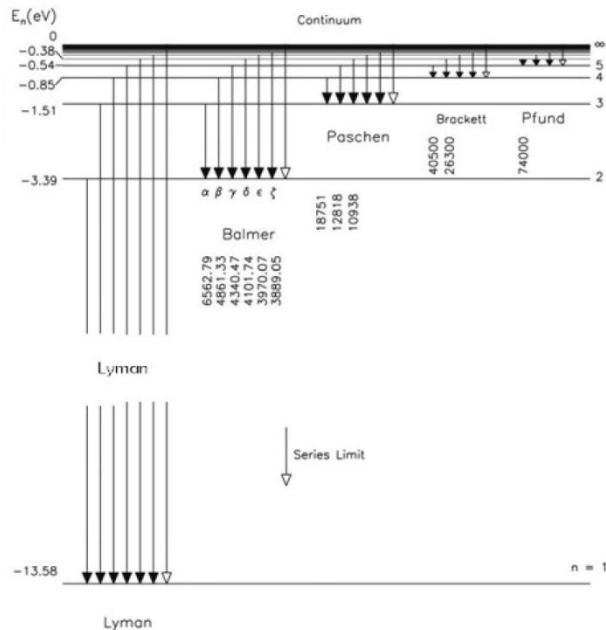
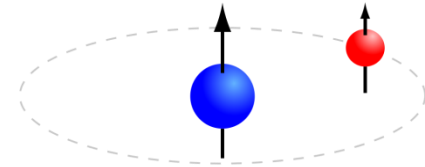
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r})$$



$$E_n = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

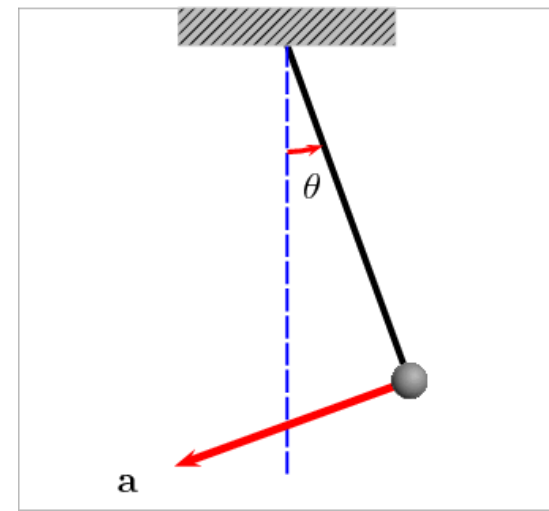
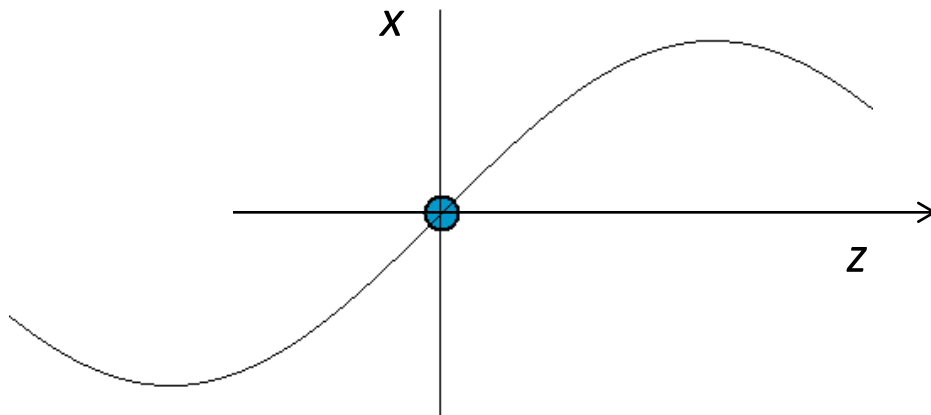
- Overige effecten:

- Relativistische correctie $-9,045 \times 10^{-4} \text{ eV}$ $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots$
- Spin-baan koppeling – fijnstructuur $Zn^{-3} \times 10^{-4} \text{ eV}$
- Spin-spin koppeling – hyperfijnstructuur 21 cm lijn
- Darwin term $2nE_n^2/m_e c^2$, Lamb-verschuiving 1 GHz



Harmonische oscillator

- Systeem wordt verplaatst uit evenwicht
 - Toenemende tegenwerkende kracht $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
 - Harmonische oscillaties rond evenwichtspunt $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
 - Frequency $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$
 - Potentiële energie $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$



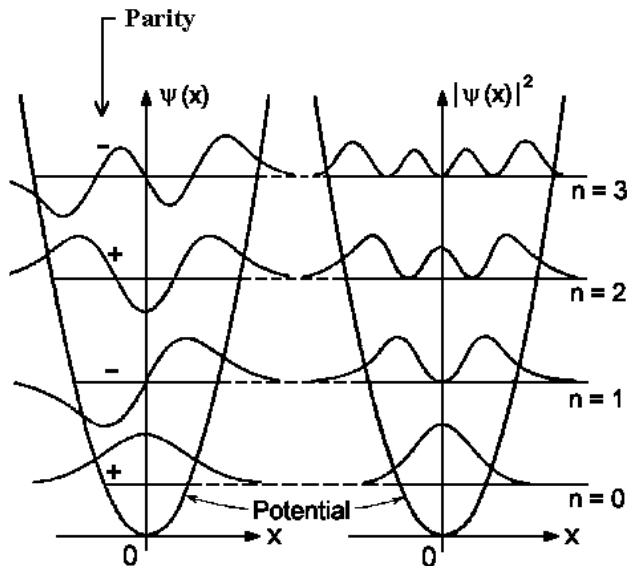
Quantum harmonische oscillator

- Hamiltoniaan $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m \omega^2$ $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

- Schrödingervergelijking $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

- Golffuncties $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$

- Energieën $E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$



$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

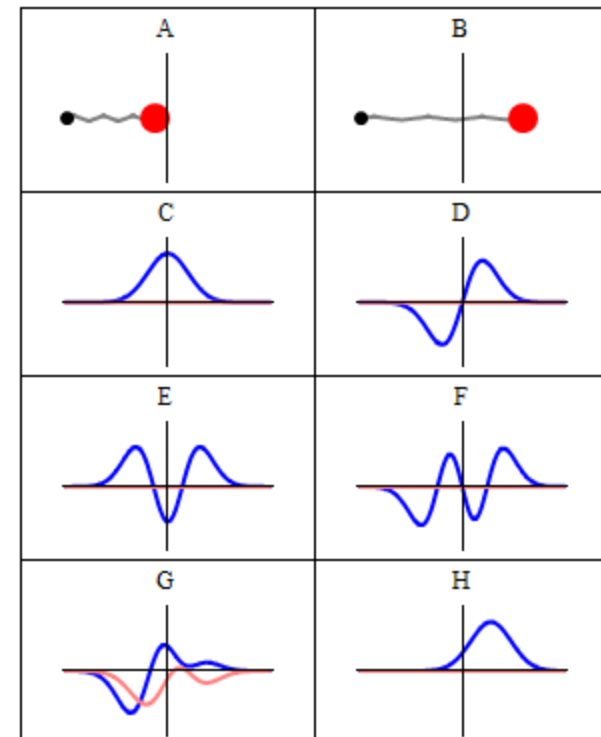
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$



Huiswerk: opgave 3.5.1

Opgave 5: Harmonische oscillator

De golffunctie $\Psi(x, t)$ voor de laagste energietoestand van een eenvoudige harmonische oscillator, bestaande uit een deeltje met massa m waarop een lineaire herstelkracht met krachtconstante C werkt, kan worden geschreven als $\Psi(x, t) = Ae^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2}e^{-(i/2)\sqrt{C/m}t}$, waarbij de reële constante A elke waarde kan aannemen.

1. Verifieer dat deze uitdrukking een oplossing is van de schrödingervergelijking voor de betreffende potentiaal ($V(x, t) = V(x) = Cx^2/2$).

Oplossing: We onderzoeken of de vergelijking een oplossing is, door hem in te vullen in de Schrödingervergelijking en te controleren of hij hieraan voldoet. De Schrödingervergelijking luidt

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (15)$$

Allereerst bepalen we de relevante partiële afgeleiden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} &= -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} x \Psi(x, t), \\ \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} \Psi(x, t) + \frac{Cmx^2}{\hbar^2} \Psi(x, t), \\ \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{C}{m}} \Psi(x, t). \end{aligned}$$

Huiswerk: opgave 3.5.2

Invullen in de Schrödingervergelijking levert

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\Psi(x,t) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{Cmx^2}{\hbar^2}\Psi(x,t) + \frac{Cx^2}{2}\Psi(x,t) = -i\hbar\frac{i}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi(x,t). \quad (17)$$

We kunnen nu overal $\Psi(x,t)$ wegstrepen. We vinden dan

$$\underline{+\frac{\hbar}{2m}\sqrt{Cm} - \frac{Cx^2}{2} + \frac{Cx^2}{2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}} \quad (18)$$

en het is duidelijk dat de vergelijking inderdaad een oplossing van de Schrödingervergelijking is.

Huiswerk: opgave 3.5.2

Invullen in de Schrödingervergelijking levert

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}\Psi(x,t) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{Cmx^2}{\hbar^2}\Psi(x,t) + \frac{Cx^2}{2}\Psi(x,t) = -i\hbar\frac{i}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}\Psi(x,t). \quad (17)$$

We kunnen nu overal $\Psi(x,t)$ wegstrepen. We vinden dan

$$\underline{+\frac{\hbar}{2m}\sqrt{Cm} - \frac{Cx^2}{2} + \frac{Cx^2}{2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}} \quad (18)$$

en het is duidelijk dat de vergelijking inderdaad een oplossing van de Schrödingervergelijking is.

2. Bewijs dat $\Psi(x,t)^*\Psi(x,t)$ reëel is, en enkel positief of nul kan zijn.

Oplossing: Hiertoe schrijven we de golffunctie als

$$\Psi(x,t) = a(x,t) + ib(x,t), \quad (19)$$

met $a(x,t)$ het reële deel en $b(x,t)$ het imaginaire deel van de golffunctie. Voor de complex geconjugeerde golffunctie geldt dan

$$\Psi^*(x,t) = a(x,t) - ib(x,t), \quad (20)$$

Het product $\Psi(x,t)^*\Psi(x,t)$ kan geschreven worden als

$$\Psi(x,t)^*\Psi(x,t) = (a(x,t) - ib(x,t))(a(x,t) + ib(x,t)) = a^2(x,t) + b^2(x,t) \geq 0. \quad (21)$$

Huiswerk: opgave 3.5.3

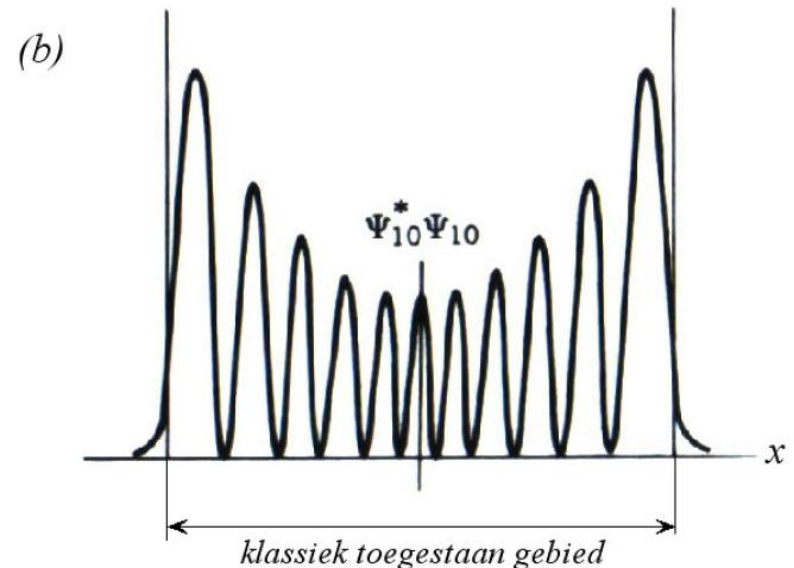
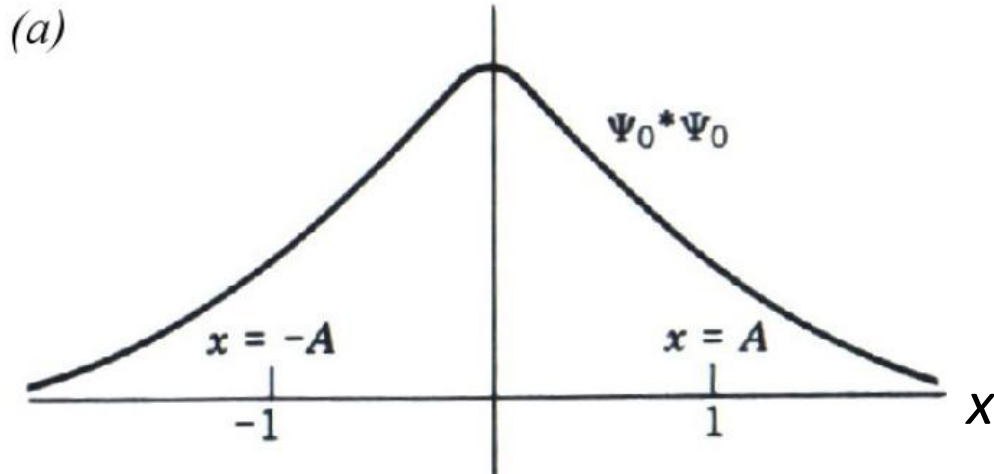
3. Bereken de waarschijnlijkheidsdichtheid voor de eenvoudige harmonische oscillator in de laagste energietoestand met behulp van de gegeven golffunctie.

Oplossing: De waarschijnlijkheidsdichtheid wordt gegeven door de uitdrukking $\Psi(x, t)^* \Psi(x, t)$ en indien we de gegeven golffunctie gebruiken, vinden we

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = \left(A e^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2} e^{+(i/2)\sqrt{C/mt}} \right) \left(A e^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2} e^{-(i/2)\sqrt{C/mt}} \right). \quad (22)$$

De complexe exponenten (het fasedeel) vallen weg en we houden over

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{-ax^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}. \quad (23)$$



4. Evalueer de voorspellingen van de klassieke fysica voor de waarschijnlijkheidsdichtheid van een eenvoudige harmonische oscillator in de opgave en vergelijk het resultaat met dat gevonden in de vorige deelopgave.

Oplossing: In de klassieke fysica hebben we te maken met een deeltje, dat zich als het ware in een paraboolvormige kom bevindt. Klassiek komt de laagste energietoestand overeen met de situatie dat het deeltje zich in rust op positie $x = 0$ bevindt. Uiteraard is dat in strijd met de onzekerheidsrelatie en vinden we in de quantummechanica derhalve een nulpuntsenergie. We zullen in het volgende de situatie met klassieke fysica beschrijven.

Het klassieke deeltje is onderhevig aan een kracht die evenredig is met de verplaatsing van de evenwichtstoestand en gericht is naar $x = 0$. De oscillator heeft een potentiële energie,

$$V(x) = \frac{C}{2}x^2, \quad (24)$$

zodat het deeltje een kracht

$$F = -\frac{dV}{dx} = -Cx \quad (25)$$

ervaart, met C de zogenaamde veerconstante. Door gebruik te maken van de tweede wet van Newton, vinden we de differentiaalvergelijking

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Cx. \quad (26)$$

Deze vergelijking heeft als oplossing (controleer dat maar door invullen)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (27)$$

waarbij A de amplitude, ϕ de fasehoek en $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$ de hoekfrequentie zijn. We kunnen de snelheid van het klassieke deeltje vinden door de afgeleide te nemen en dat levert

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (28)$$

De uitdrukkingen voor x en v komen voor in de formule voor de totale energie en produceren een bewegingsconstante.

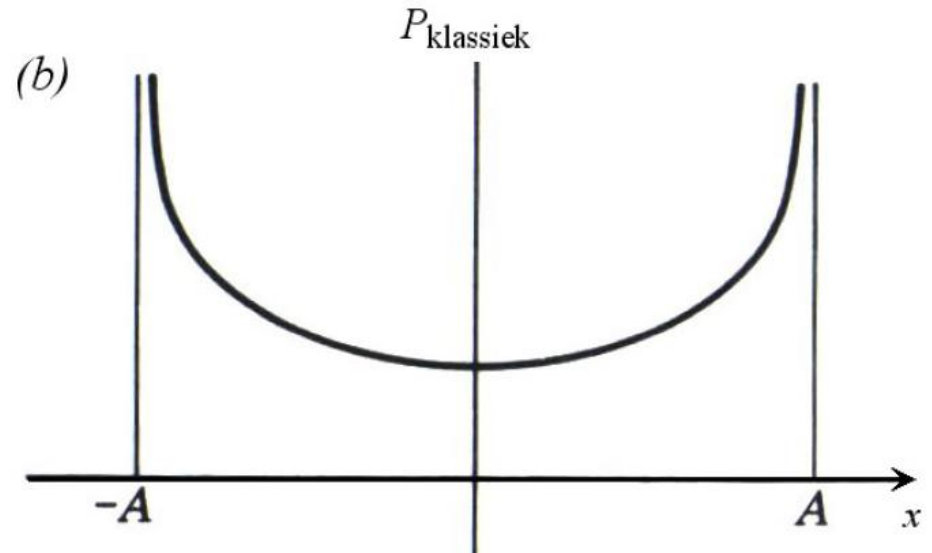
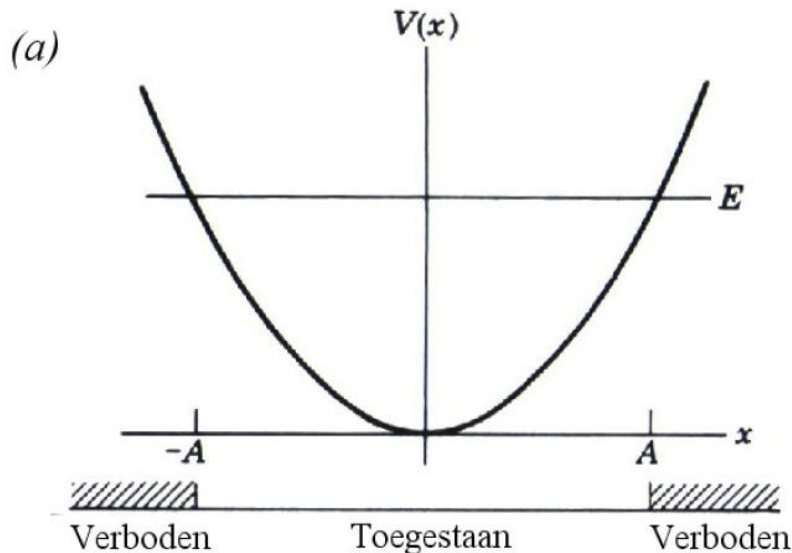
$$\begin{aligned}
 E &= K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 \\
 &= \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{C}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
 &= \frac{C}{2}A^2.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dit resultaat kan geherschikt worden, zodat we v als functie van x krijgen,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{C}{2}x^2 \right)} = \sqrt{\frac{C}{m} (A^2 - x^2)}.$$

$P_{\text{klassiek}}(x)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$

Het is duidelijk dat x^2 niet groter kan zijn dan A^2 , anders kan v niet de fysische snelheid van het klassieke deeltje voorstellen.



De uitdrukkingen voor x en v komen voor in de formule voor de totale energie en produceren een bewegingsconstante.

$$\begin{aligned}
 E &= K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 \\
 &= \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{C}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
 &= \frac{C}{2}A^2.
 \end{aligned} \tag{29}$$

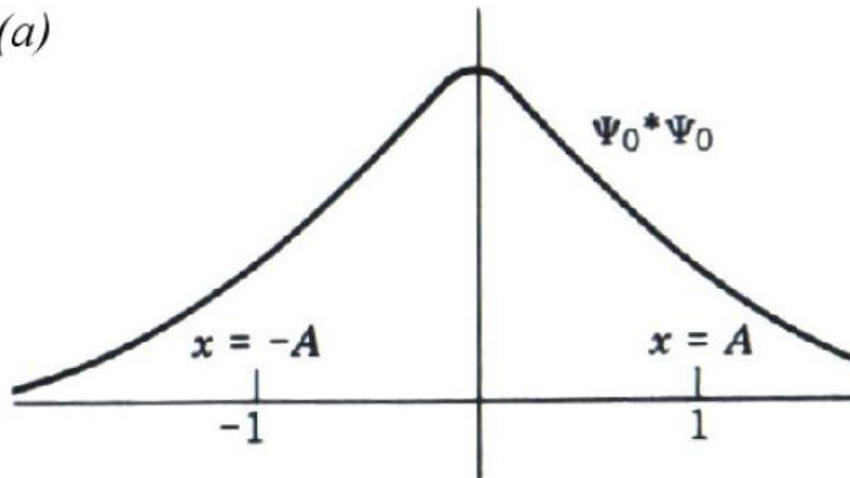
Dit resultaat kan geherschikt worden, zodat we v als functie van x krijgen,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{C}{2}x^2 \right)} = \sqrt{\frac{C}{m} (A^2 - x^2)}.$$

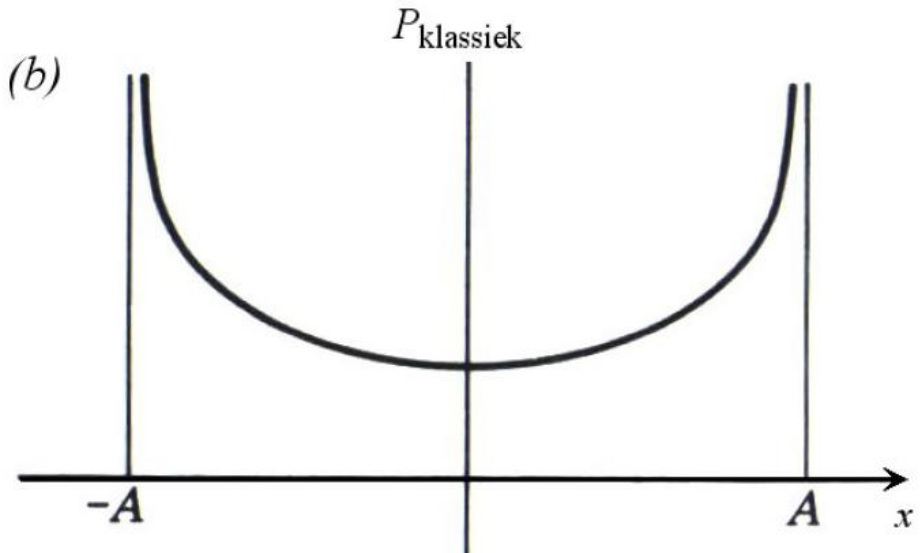
$P_{\text{klassiek}}(x)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$

Het is duidelijk dat x^2 niet groter kan zijn dan A^2 , anders kan v niet de fysische snelheid van het klassieke deeltje voorstellen.

(a)



(b)



De uitdrukkingen voor x en v komen voor in de formule voor de totale energie en produceren een bewegingsconstante.

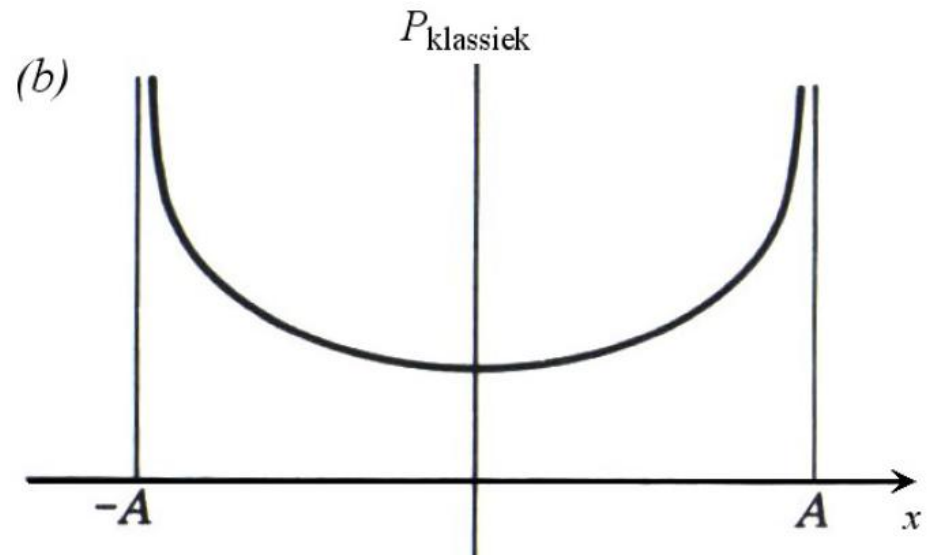
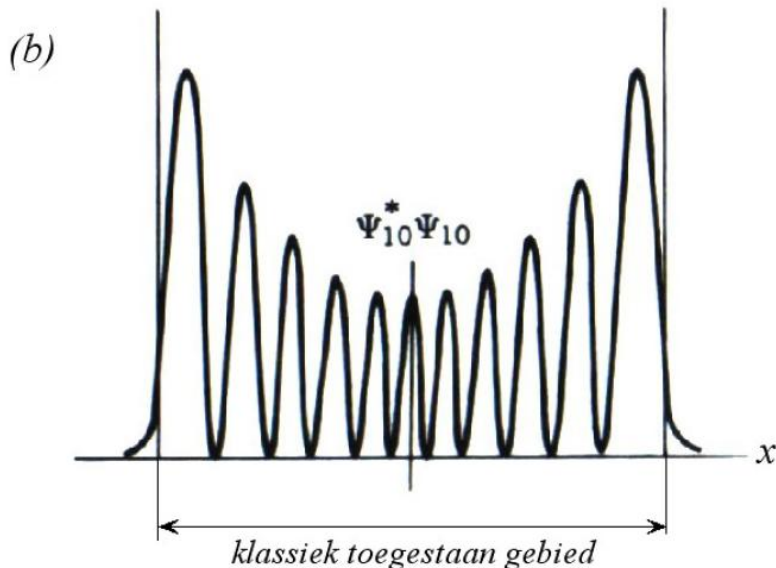
$$\begin{aligned}
 E &= K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 \\
 &= \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{C}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
 &= \frac{C}{2}A^2.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dit resultaat kan geherschikt worden, zodat we v als functie van x krijgen,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{C}{2}x^2 \right)} = \sqrt{\frac{C}{m} (A^2 - x^2)}.$$

$P_{\text{klassiek}}(x)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$

Het is duidelijk dat x^2 niet groter kan zijn dan A^2 , anders kan v niet de fysische snelheid van het klassieke deeltje voorstellen.



5. Normeer de golffunctie door de waarde van de willekeurige constante A te bepalen, zodanig dat de totale waarschijnlijkheid het deeltje ergens aan te treffen gelijk wordt aan 1.

Oplossing: We normeren de golffunctie door de totale waarschijnlijkheid op 1 te stellen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1. \quad (33)$$

De waarschijnlijkheidsdichtheid is uitgerekend in opgave 5.3 en we vinden

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{-ax^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} \quad \boxed{A^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{Cm}{\hbar^2 \pi^2}}}$$

5. Normeer de golffunctie door de waarde van de willekeurige constante A te bepalen, zodanig dat de totale waarschijnlijkheid het deeltje ergens aan te treffen gelijk wordt aan 1.

Oplossing: We normeren de golffunctie door de totale waarschijnlijkheid op 1 te stellen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1. \quad (33)$$

De waarschijnlijkheidsdichtheid is uitgerekend in opgave 5.3 en we vinden

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{-ax^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} \quad \boxed{A^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{Cm}{\hbar^2 \pi^2}}}$$

6. Bepaal de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ voor een deeltje in de laagste energietoestand van een harmonische oscillator door gebruik te maken van de golffunctie en waarschijnlijkheidsdichtheid berekend in de vorige opgaven.

Oplossing: De verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ volgt uit

$$\langle x \rangle = \langle \Psi | x | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx. \quad (45)$$

We zien direct dat het tijdafhankelijke deel wegvalt en schrijven met behulp van vergelijking (23)

$$\langle x \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx. \quad (46)$$

Het resultaat van deze integraal is gelijk aan nul, want we integreren over het product van een oneven (x) en een even (e^{-ax^2}) functie. Derhalve is $\langle x \rangle = 0$.

Huiswerk: opgave 3.5.7

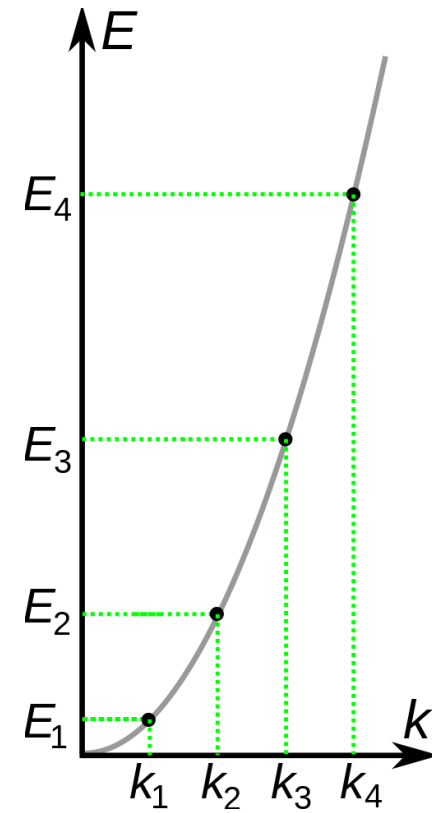
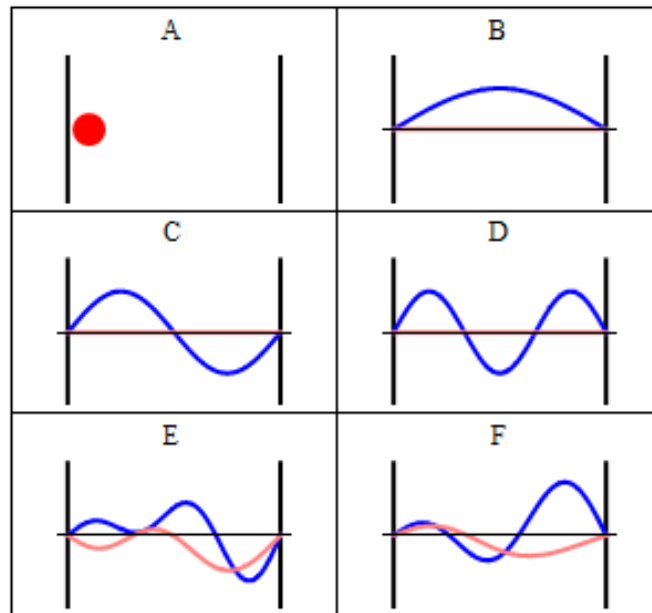
7. Beschouw een deeltje met mass m dat zich vrij kan bewegen langs de x -as tussen posities $x = -a/2$ en $x = +a/2$, maar waarbij het strikt verboden is dat het deeltje zich buiten dit interval bevindt. De golffunctie van het deeltje kan geschreven worden als $\Psi(x, t) = A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar}$ binnen het interval en is gelijk aan nul erbuiten. Bepaal de energie van de laagste energietoestand.

$$\left. \begin{array}{l} E = T = \frac{p^2}{2m} \\ p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L} \end{array} \right\} E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}, \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor $n = 1$ vinden we

$$\Psi(x, t) = A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar}$$

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$



Huiswerk: opgave 3.5.8

De verwachtingswaarde van x wordt gegeven door de integraal

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} x \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = 0 \quad A^2 = \frac{2}{a}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} \frac{\hbar}{i} \left(-\frac{\pi}{a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} dx = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \frac{a^3}{\pi^3} \left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^2}{12\pi^2} (\pi^2 - 6)$$

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi^* \left(2mi\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi dx = 2mE_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi^* \Psi dx = 2mE_1 \end{aligned}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{\pi^2 - 6}{12}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = 2mE_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}$$

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} \hbar \approx 0.57 \hbar$$

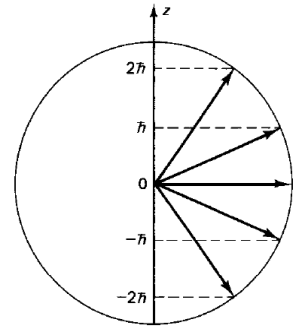
Spin en baanimpulsmoment

Klassiek baanimpulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

- we kunnen alle drie de componenten meten en dus tegelijkertijd weten
- de componenten mogen elke waarde hebben

QM baanimpulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

- een meting van bijvoorbeeld L_x verandert de waarde van L_y en L_z
- we mogen L^2 en L_z tegelijkertijd kennen
- metingen geven als resultaat slechts bepaalde toegestane waarden



$$L^2 \quad l(l+1)\hbar^2 \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$L_z \quad m_l \hbar \quad m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l$$

Idem voor spinimpulsmoment

- s kan zowel integer als half-integer waarden aannemen!

$$S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \quad s(s+1)\hbar^2 \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

$$S_z \quad m_s \hbar \quad m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

Spin: eigenschap
van deeltje
fermionen
bosonen

Spin van deeltjes

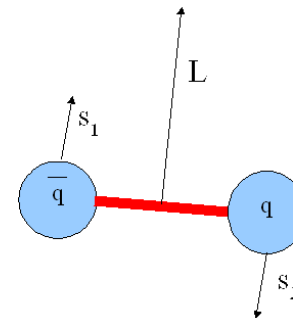
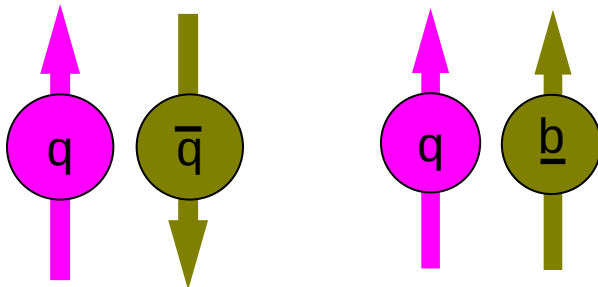
Spin is een eigenschap van een deeltje

- dit in tegenstelling tot baanimpulsmoment
- we onderscheiden fermionen en bosonen

Bosons (integer spin)		Fermions ($\frac{1}{2}$ -integer spin)	
Spin 0	Spin 1	Spin $\frac{1}{2}$	Spin $\frac{3}{2}$
— Pseudo-scalar mesons	Mediators Vector mesons	Quarks, leptons Baryon octet	— Baryon decuplet

Elementaire deeltjes

Samengestelde deeltjes



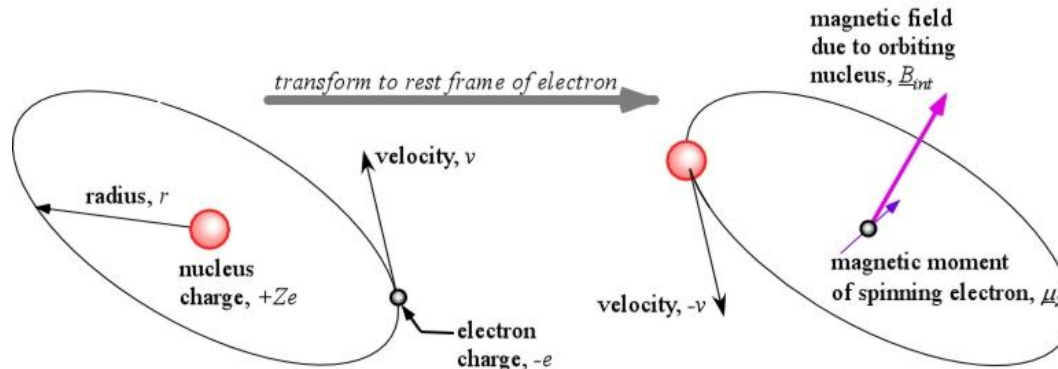
Optellen van impulsmomenten

- Toestand met impulsmoment: $| l m_l \rangle$ of $| s m_s \rangle$

Voorbeeld: elektron in waterstofatoom bezet baantoestand $| 3 -1 \rangle$ en spin toestand $| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle$

Dit betekent $l = 3$, $m_l = -1$, $s = \frac{1}{2}$ (maar ja, het is een elektron!), $m_s = \frac{1}{2}$

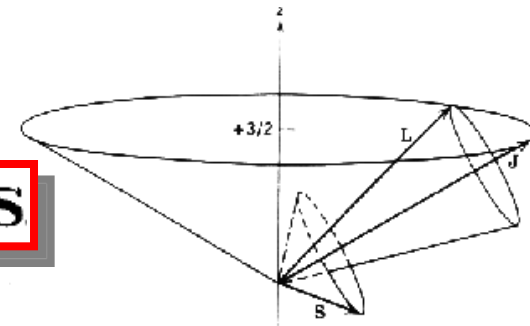
SPIN - ORBIT COUPLING



Stel voor dat er spin-baan koppeling is

We zijn dan niet geïnteresseerd in L en S individueel (die zijn niet behouden), maar in het totale impulsmoment J

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$



Optellen van impulsmomenten

Het ψ meson

Baanimpulsmoment is gelijk aan nul

Spin van quark en antiquark leveren spin van het meson: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$

Hoe tellen we twee impulsmomenten op?

Klassiek zouden we de componenten optellen

QM kennen we enkel 1 component en de grootte

Hoe combineren we $|j_1 m_1\rangle$ en $|j_2 m_2\rangle$ tot $|j m\rangle$?

De z-componenten tellen gewoon op

$$m = m_1 + m_2$$

De lengten tellen vectorieel op!

We hebben de volgende mogelijkheden:

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2)$$

Voorbeeld: een deeltje met spin 1 heeft baanimpulsmoment 3.

Totaal impulsmoment is dan $j = 2, 3$ of 4 .

Optellen van impulsmomenten

De baryonen

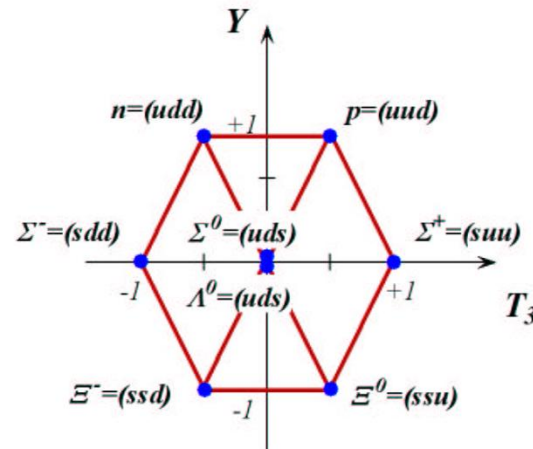
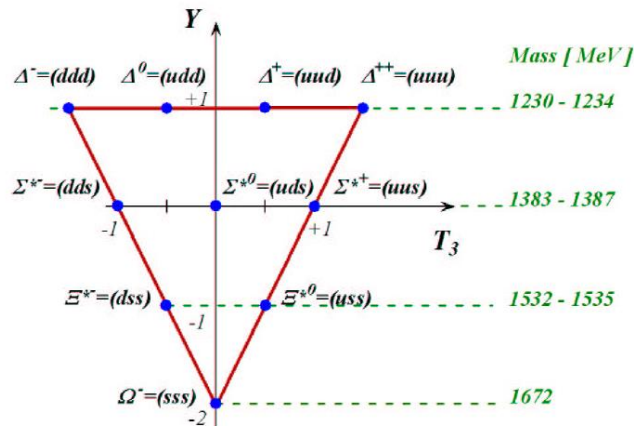
*Je hebt drie quarks in een toestand met baanimpulsmoment nul
Wat zijn de mogelijk spins van de resulterende baryonen?*

Stel eerst de spin van twee quarks samen: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ of $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Voeg nu het derde quark toe: $1 + \frac{1}{2} = 3/2$ of $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, en $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Het baryon kan dus spin $3/2$ of $\frac{1}{2}$ hebben: het decouplet ($j = 3/2$) en octet ($j = \frac{1}{2}$).

Als we verder nog baanimpulsmoment toelaten, dan nemen de combinaties toe.



Clebsch – Gordan coëfficiënten

We weten nu welk totaal impulsmoment j mogelijk is, als we j_1 en j_2 combineren

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2)$$

De expliciete decompositie van $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ in toestanden $|j m\rangle$ is

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{(j_1+j_2)} \underbrace{C_{m m_1 m_2}^{j j_1 j_2}}_{\text{Clebsch – Gordan coëfficiënten}} |j m\rangle \quad \text{met} \quad m = m_1 + m_2$$

Clebsch – Gordan coëfficiënten

PDG bevat tabel van CG coefs

zie

<http://pdg.lbl.gov/>

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

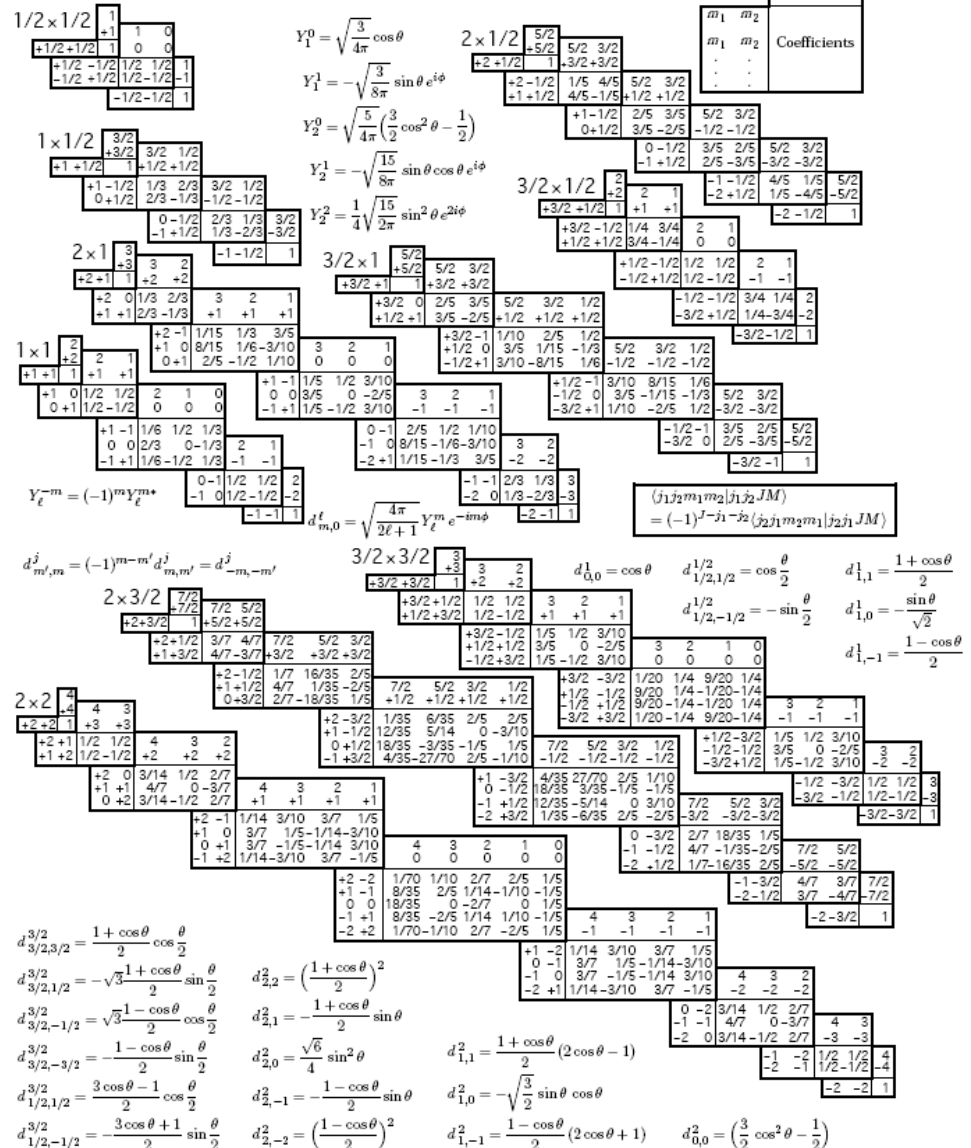


Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1935), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Sciences Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Voorbeeld 1: Clebsch – Gordan coefs

Elektron in waterstofatoom bezet toestand $|2 -1\rangle$ voor baanimpulsmoment en $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ voor spin. We meten J^2 .

Welke waarden kunnen we vinden?

Wat is de waarschijnlijkheid voor elk van de waarden?

Waarden: $j = l + s = 2 + \frac{1}{2} = 5/2$ of $j = l - s = 2 - \frac{1}{2} = 3/2$

De z componenten tellen op: $m = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Koppel spin 2 aan spin $\frac{1}{2}$

Beschouw rij -1 en $+1/2$

Lees af

$$|2-1\rangle|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/5}|5/2 - \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{3/5}|3/2 - \frac{1}{2}\rangle$$

Waarschijnlijkheid: kwadrateren!

Diagram illustrating a sequence of PDG (Partial Dependency Graph) nodes, showing a staircase pattern of values.

The nodes are represented as tables of values:

- Node 1 (Circled in Blue): $2 \times 1/2$
- Node 2 (Circled in Red): $2 - \frac{1}{2}$
- Node 3 (Highlighted in Blue): -1

The sequence continues with the following values:

- Node 4: $5/2, 3/2$
- Node 5: $5/2, 3/2$
- Node 6: $5/2, 3/2$
- Node 7: $5/2, 3/2$
- Node 8: $5/2, 3/2$
- Node 9: $5/2, 3/2$
- Node 10: $5/2, 3/2$
- Node 11: $5/2, 3/2$
- Node 12: $5/2, 3/2$
- Node 13: $5/2, 3/2$
- Node 14: $5/2, 3/2$
- Node 15: $5/2, 3/2$
- Node 16: $5/2, 3/2$
- Node 17: $5/2, 3/2$
- Node 18: $5/2, 3/2$
- Node 19: $5/2, 3/2$
- Node 20: $5/2, 3/2$
- Node 21: $5/2, 3/2$
- Node 22: $5/2, 3/2$
- Node 23: $5/2, 3/2$
- Node 24: $5/2, 3/2$
- Node 25: $5/2, 3/2$
- Node 26: $5/2, 3/2$
- Node 27: $5/2, 3/2$
- Node 28: $5/2, 3/2$
- Node 29: $5/2, 3/2$
- Node 30: $5/2, 3/2$
- Node 31: $5/2, 3/2$
- Node 32: $5/2, 3/2$
- Node 33: $5/2, 3/2$
- Node 34: $5/2, 3/2$
- Node 35: $5/2, 3/2$
- Node 36: $5/2, 3/2$
- Node 37: $5/2, 3/2$
- Node 38: $5/2, 3/2$
- Node 39: $5/2, 3/2$
- Node 40: $5/2, 3/2$
- Node 41: $5/2, 3/2$
- Node 42: $5/2, 3/2$
- Node 43: $5/2, 3/2$
- Node 44: $5/2, 3/2$
- Node 45: $5/2, 3/2$
- Node 46: $5/2, 3/2$
- Node 47: $5/2, 3/2$
- Node 48: $5/2, 3/2$
- Node 49: $5/2, 3/2$
- Node 50: $5/2, 3/2$
- Node 51: $5/2, 3/2$
- Node 52: $5/2, 3/2$
- Node 53: $5/2, 3/2$
- Node 54: $5/2, 3/2$
- Node 55: $5/2, 3/2$
- Node 56: $5/2, 3/2$
- Node 57: $5/2, 3/2$
- Node 58: $5/2, 3/2$
- Node 59: $5/2, 3/2$
- Node 60: $5/2, 3/2$
- Node 61: $5/2, 3/2$
- Node 62: $5/2, 3/2$
- Node 63: $5/2, 3/2$
- Node 64: $5/2, 3/2$
- Node 65: $5/2, 3/2$
- Node 66: $5/2, 3/2$
- Node 67: $5/2, 3/2$
- Node 68: $5/2, 3/2$
- Node 69: $5/2, 3/2$
- Node 70: $5/2, 3/2$
- Node 71: $5/2, 3/2$
- Node 72: $5/2, 3/2$
- Node 73: $5/2, 3/2$
- Node 74: $5/2, 3/2$
- Node 75: $5/2, 3/2$
- Node 76: $5/2, 3/2$
- Node 77: $5/2, 3/2$
- Node 78: $5/2, 3/2$
- Node 79: $5/2, 3/2$
- Node 80: $5/2, 3/2$
- Node 81: $5/2, 3/2$
- Node 82: $5/2, 3/2$
- Node 83: $5/2, 3/2$
- Node 84: $5/2, 3/2$
- Node 85: $5/2, 3/2$
- Node 86: $5/2, 3/2$
- Node 87: $5/2, 3/2$
- Node 88: $5/2, 3/2$
- Node 89: $5/2, 3/2$
- Node 90: $5/2, 3/2$
- Node 91: $5/2, 3/2$
- Node 92: $5/2, 3/2$
- Node 93: $5/2, 3/2$
- Node 94: $5/2, 3/2$
- Node 95: $5/2, 3/2$
- Node 96: $5/2, 3/2$
- Node 97: $5/2, 3/2$
- Node 98: $5/2, 3/2$
- Node 99: $5/2, 3/2$
- Node 100: $5/2, 3/2$
- Node 101: $5/2, 3/2$
- Node 102: $5/2, 3/2$
- Node 103: $5/2, 3/2$
- Node 104: $5/2, 3/2$
- Node 105: $5/2, 3/2$
- Node 106: $5/2, 3/2$
- Node 107: $5/2, 3/2$
- Node 108: $5/2, 3/2$
- Node 109: $5/2, 3/2$
- Node 110: $5/2, 3/2$
- Node 111: $5/2, 3/2$
- Node 112: $5/2, 3/2$
- Node 113: $5/2, 3/2$
- Node 114: $5/2, 3/2$
- Node 115: $5/2, 3/2$
- Node 116: $5/2, 3/2$
- Node 117: $5/2, 3/2$
- Node 118: $5/2, 3/2$
- Node 119: $5/2, 3/2$
- Node 120: $5/2, 3/2$
- Node 121: $5/2, 3/2$
- Node 122: $5/2, 3/2$
- Node 123: $5/2, 3/2$
- Node 124: $5/2, 3/2$
- Node 125: $5/2, 3/2$
- Node 126: $5/2, 3/2$
- Node 127: $5/2, 3/2$
- Node 128: $5/2, 3/2$
- Node 129: $5/2, 3/2$
- Node 130: $5/2, 3/2$
- Node 131: $5/2, 3/2$
- Node 132: $5/2, 3/2$
- Node 133: $5/2, 3/2$
- Node 134: $5/2, 3/2$
- Node 135: $5/2, 3/2$
- Node 136: $5/2, 3/2$
- Node 137: $5/2, 3/2$
- Node 138: $5/2, 3/2$
- Node 139: $5/2, 3/2$
- Node 140: $5/2, 3/2$
- Node 141: $5/2, 3/2$
- Node 142: $5/2, 3/2$
- Node 143: $5/2, 3/2$
- Node 144: $5/2, 3/2$
- Node 145: $5/2, 3/2$
- Node 146: $5/2, 3/2$
- Node 147: $5/2, 3/2$
- Node 148: $5/2, 3/2$
- Node 149: $5/2, 3/2$
- Node 150: $5/2, 3/2$
- Node 151: $5/2, 3/2$
- Node 152: $5/2, 3/2$
- Node 153: $5/2, 3/2$
- Node 154: $5/2, 3/2$
- Node 155: $5/2, 3/2$
- Node 156: $5/2, 3/2$
- Node 157: $5/2, 3/2$
- Node 158: $5/2, 3/2$
- Node 159: $5/2, 3/2$
- Node 160: $5/2, 3/2$
- Node 161: $5/2, 3/2$
- Node 162: $5/$

Voorbeeld 2: Clebsch – Gordan coefs

Twee spin $\frac{1}{2}$ toestanden kunnen combineren tot spin 1 en 0.

Wat is de CG decompositie voor deze toestanden?

We zien dat

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle &= |11\rangle \\ |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle &= (1/\sqrt{2})|10\rangle + (1/\sqrt{2})|00\rangle \\ |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle &= (1/\sqrt{2})|10\rangle - (1/\sqrt{2})|00\rangle \\ |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle &= |1-1\rangle \end{aligned}$$

PDG

$1/2 \times 1/2$		1		
	+1	1	0	
+1/2 +1/2	1	0	0	
+1/2 -1/2	1/2	1/2	1	
-1/2 +1/2	1/2	-1/2	-1	
	-1/2 -1/2		1	

Er zijn drie spin 1 toestanden

$$\begin{aligned} |11\rangle &= |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \\ |10\rangle &= (1/\sqrt{2})[|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle] \\ |1-1\rangle &= |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

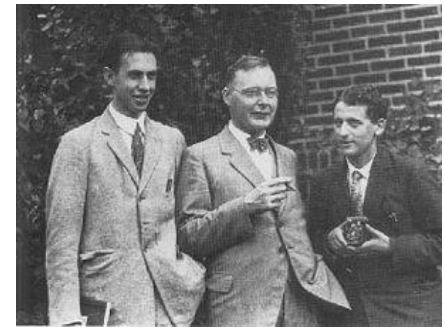
} triplet

en één spin 0
toestand

$$|00\rangle = (1/\sqrt{2})[|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle - |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle]$$

singlet

Spin $\frac{1}{2}$ systemen



Spin $\frac{1}{2}$ systemen

Leptonen, quarks, proton, neutron, *etc.*

Deeltjes kunnen spin up ($\uparrow$) of spin down ($\downarrow$) hebben

We gebruiken 2-component kolomvectoren: spinoren

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algemene toestand van een spin $\frac{1}{2}$ deeltje

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Complex getal

We meten S_z

$|\alpha|^2$ is waarschijnlijkheid op waarde $+\frac{1}{2}\hbar$

$|\beta|^2$ is waarschijnlijkheid op waarde $-\frac{1}{2}\hbar$

Spin $\frac{1}{2}$ systemen



Wolfgang Pauli
1931

We willen S_x of S_y meten voor toestand $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Mogelijke meetwaarden weer $+\frac{1}{2}\hbar$ en $-\frac{1}{2}\hbar$

Maar wat zijn de waarschijnlijkheden?

Introduceer
operatoren

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bepaal eigenwaarden $+\frac{1}{2}\hbar$ $-\frac{1}{2}\hbar$

Bepaal eigenvectoren. Voor S_x $x_{\pm} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Schrijf toestand als lineaire combinatie van eigenvectoren

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$a = (1/\sqrt{2})(\alpha + \beta); \quad b = (1/\sqrt{2})(\alpha - \beta)$$

Spin ½ systemen: Pauli spin matrices

Pauli spin matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hiermee $\hat{\mathbf{S}} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$

Vector componenten (in R^3)
veranderen onder coördinaten
transformaties als

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Spinor componenten (in C^2)
veranderen onder coördinaten
transformaties als

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

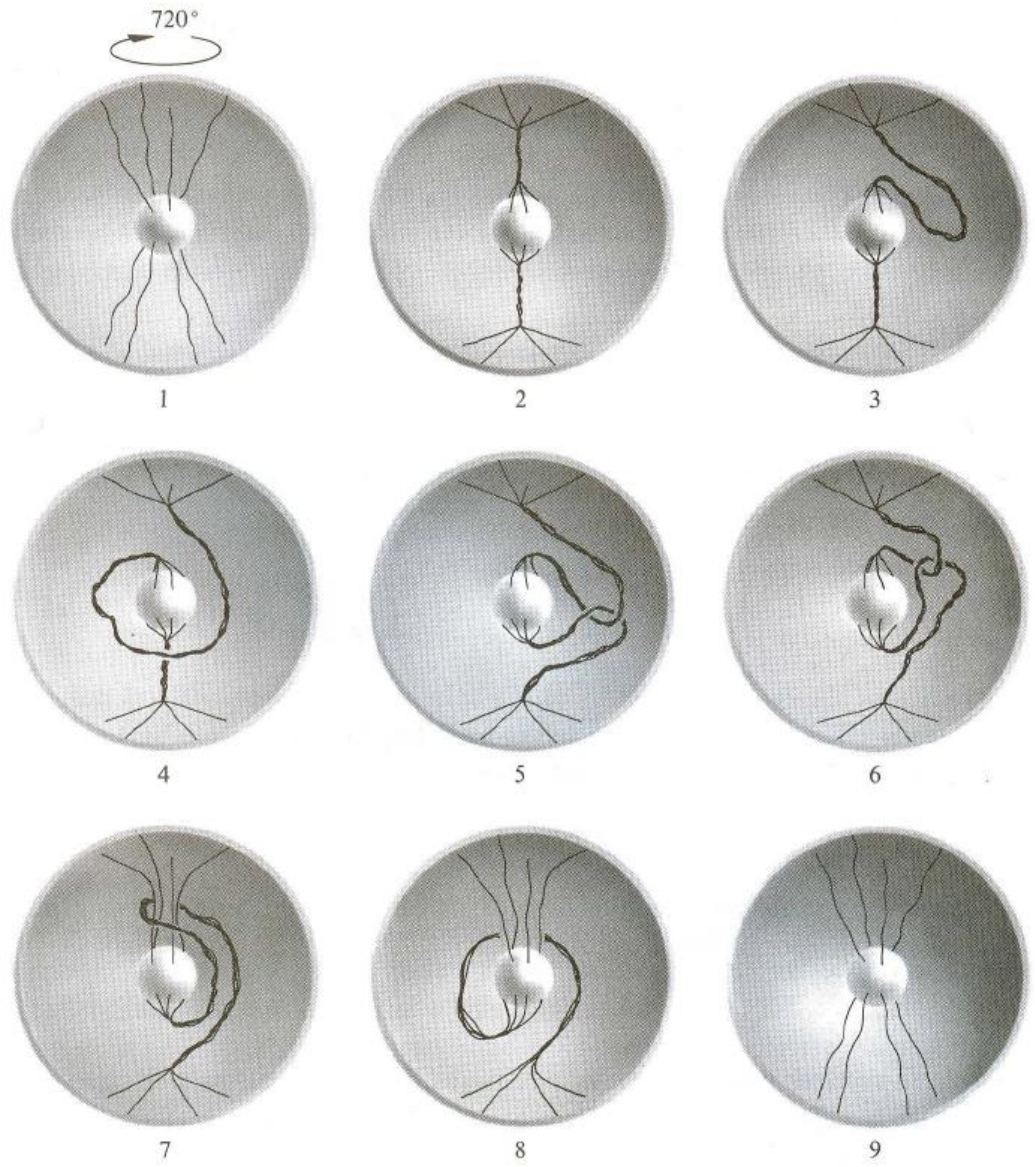
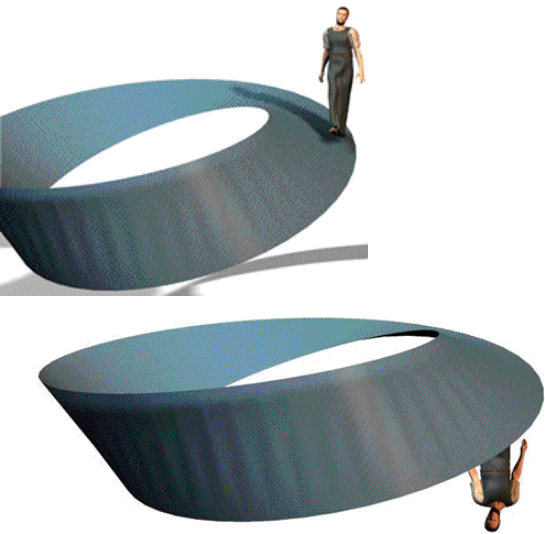
Er geldt $U(\theta) = e^{-i\theta \cdot \boldsymbol{\sigma}/2}$ met θ langs rotatieas

Merk op dat exponent een matrix is! $e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$

Orientation entanglement relation

Stel een object voor dat met zijn omgeving verbonden is met elastische draden. Een rotatie over 720° leidt niet tot entanglement.

Spinmatrix



Isospin (u en d flavor) symmetrie

Idee: sterke wisselwerking
gelijk voor proton en neutron
elektrische lading speelt geen rol ...

proton

$$m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$$

neutron

$$m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$$

Isospin I

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

nucleon

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Componenten in *isospinruimte*

Nucleon heeft isospin $\frac{1}{2}$ en de derde component, I_3 ,
heeft eigenwaarden $+\frac{1}{2}$ (proton) of $-\frac{1}{2}$ (neutron)

$$p = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad n = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Sterke wisselwerking invariant onder rotaties in isospinruimte en
volgens Noether: isospin behouden in alle sterke interacties.

Analoog aan rotatie-invariantie in gewone 3D: leidt tot behoud van impulsmoment

Isospin symmetrie

We kennen isospin toe aan de diverse multipletten

$$\text{Pion: } I = 1 \quad \pi^+ = |11\rangle, \quad \pi^0 = |10\rangle, \quad \pi^- = |1-1\rangle$$

$$\Lambda, I = 0 \quad \Lambda = |00\rangle$$

$$\Delta, I = 3/2 \quad \Delta^{++} = |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle, \quad \Delta^+ = |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle, \quad \Delta^0 = |\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle, \quad \Delta^- = |\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle$$

$$\text{multiplicity} = 2I + 1$$

Alles volgt uit isospin toekenning op quark niveau

$$u = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, \quad d = |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$$

Alle andere deeltjes hebben isospin $I = 0$

Isospin symmetrie: deutron

Twee nucleon systeem geeft $I = 0$ of $I = 1$

Triplet

$$\begin{aligned} |11\rangle &= pp \\ |10\rangle &= (1/\sqrt{2})(pn + np) \\ |1-1\rangle &= nn \end{aligned}$$

Singlet

$$|00\rangle = (1/\sqrt{2})(pn - np)$$

In de natuur observeren we enkel het deutron als gebonden toestand van proton en neutron



deutron heeft $I = 0$

NN interactie bevat een $I^{(1)} \bullet I^{(2)}$ term!

Leidt tot attractie in singlet toestand

Isospin symmetrie: NN verstrooiing

Beschouw NN verstrooiing

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & p + p \rightarrow d + \pi^+ \\ \text{(b)} \quad & p + n \rightarrow d + \pi^0 \\ \text{(c)} \quad & n + n \rightarrow d + \pi^- \end{aligned}$$

Isospin toestanden

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & |11\rangle \rightarrow |11\rangle \\ \text{(b)} \quad & (1/\sqrt{2})(|10\rangle + |00\rangle) \rightarrow |10\rangle \\ \text{(c)} \quad & |1-1\rangle \rightarrow |1-1\rangle \end{aligned}$$

Enkel isospin $I = 1$ combinatie draagt bij, want de sterke wisselwerking kan isospin niet veranderen!



Amplitudes hebben
verhouding

$$\mathcal{M}_a : \mathcal{M}_b : \mathcal{M}_c = 1 : (1/\sqrt{2}) : 1$$

Werkzame doorsneden

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

In overeenstemming met meetgegevens

Isospin symmetrie: πN verstrooiing

Beschouw πN verstrooiing

elastisch

$$(a) \quad \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$(c) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

$$(e) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$$

$$(b) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(d) \quad \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(f) \quad \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$$

ladingsuitwisseling

$$(g) \quad \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(i) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$$

$$(h) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(j) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

Pion $I = 1$, nucleon $I = \frac{1}{2}$  amplituden $I = \frac{3}{2}$ en $\frac{1}{2}$

$$\mathcal{M}_3 \quad \mathcal{M}_1$$

Decompositie

$$\pi^+ + p: |11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle$$

$$\pi^0 + p: |10\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle - (1/\sqrt{3})|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

$$\pi^- + p: |1-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = (1/\sqrt{3})|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2/3}|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$$

$$\pi^+ + n: |11\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle = (1/\sqrt{3})|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

$$\pi^0 + n: |10\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2/3}|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle + (1/\sqrt{3})|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$$

$$\pi^- + n: |1-1\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle$$

We vinden

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

πN verstrooiing – Delta resonantie

πN verstrooiing: aangeslagen toestanden van het nucleon

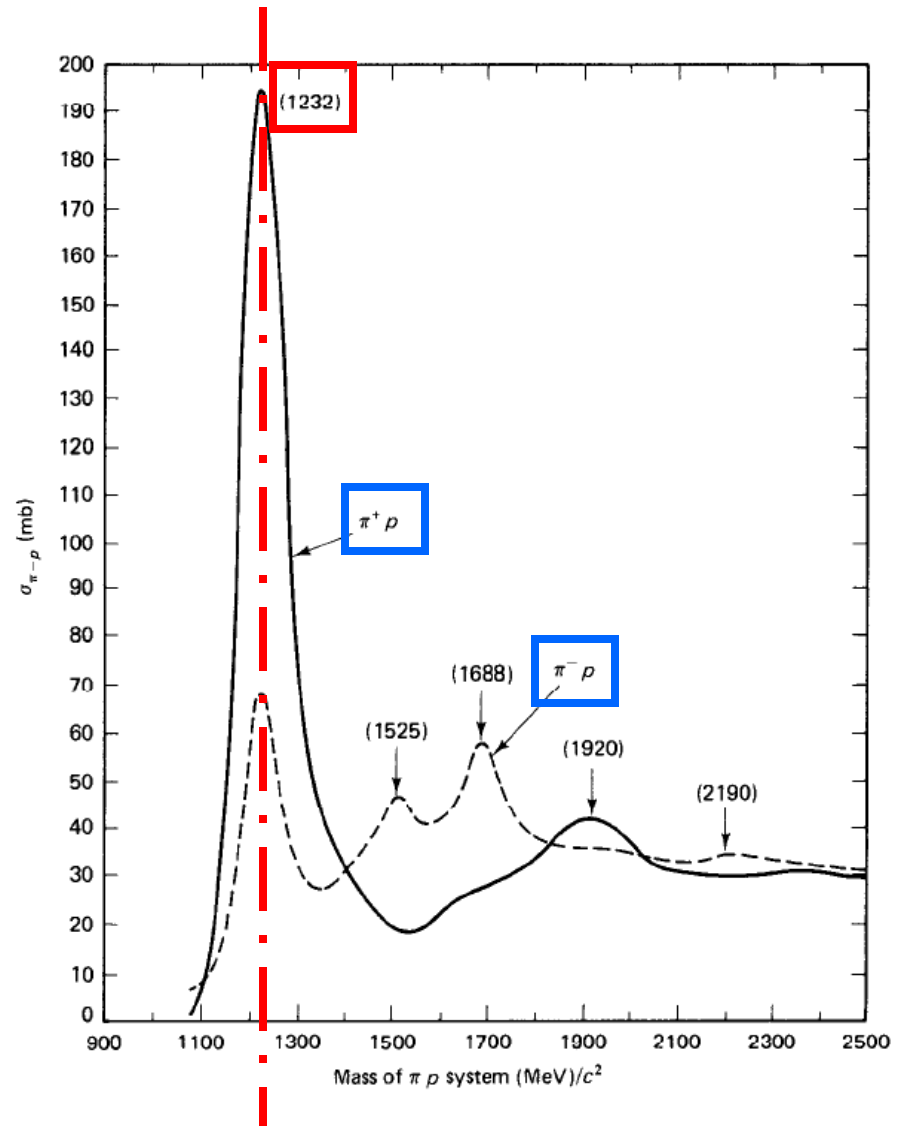
Δ resonantie bij 1232 MeV

Δ heeft spin 3/2

$$\mathcal{M}_3 \gg \mathcal{M}_1$$

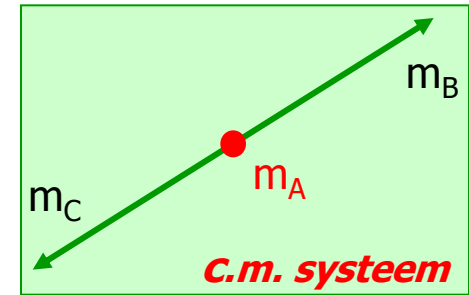
dus $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3$$



Levensduur

Bijna alle elementaire deeltjes vervallen! d.w.z.



$$\left\{ \begin{array}{ll} \# \text{ Deeltjes } t = t : & N(t) \text{ deeltjes} \\ \text{Begin } t = 0 : & N(0) \text{ deeltjes} \\ \text{Verval:} & dN(t) = -\Gamma N(t)dt \end{array} \right. \Rightarrow N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

Levensduur:

$$\tau \equiv \langle t \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} t N(t) dt}{\int_0^{+\infty} N(t) dt} = \frac{1}{\Gamma}$$

verschillende
vervalskanalen, b.v.

Vertakkings-
verhouding

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{tot} = \sum_{verval} \Gamma_i \\ \text{vertakkingsverhouding: } \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^+ \rightarrow p\pi^0, \\ \Delta^+ \rightarrow n\pi^+, \\ \Delta^+ \rightarrow \dots \end{array} \right.$$

Eenheden

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau : [T] = \frac{\hbar}{\text{GeV}} \\ \Gamma : [T]^{-1} = \frac{\text{GeV}}{\hbar} \end{array} \right. \text{ en } \hbar \approx 6.6 \times 10^{-25} \text{ GeV } s$$

b.v.

$$\begin{array}{ll} J/\psi : \Gamma_{J/\psi} = 86 \text{ keV} & \rightarrow \tau \approx \frac{6.6 \times 10^{-25}}{86 \times 10^{-6}} \approx 7.7 \times 10^{-21} s \\ \mu : \tau = 2.2 \times 10^{-6} s & \rightarrow \Gamma_{\mu} \approx \frac{6.6 \times 10^{-25}}{2.2 \times 10^{-6}} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ eV} \end{array}$$

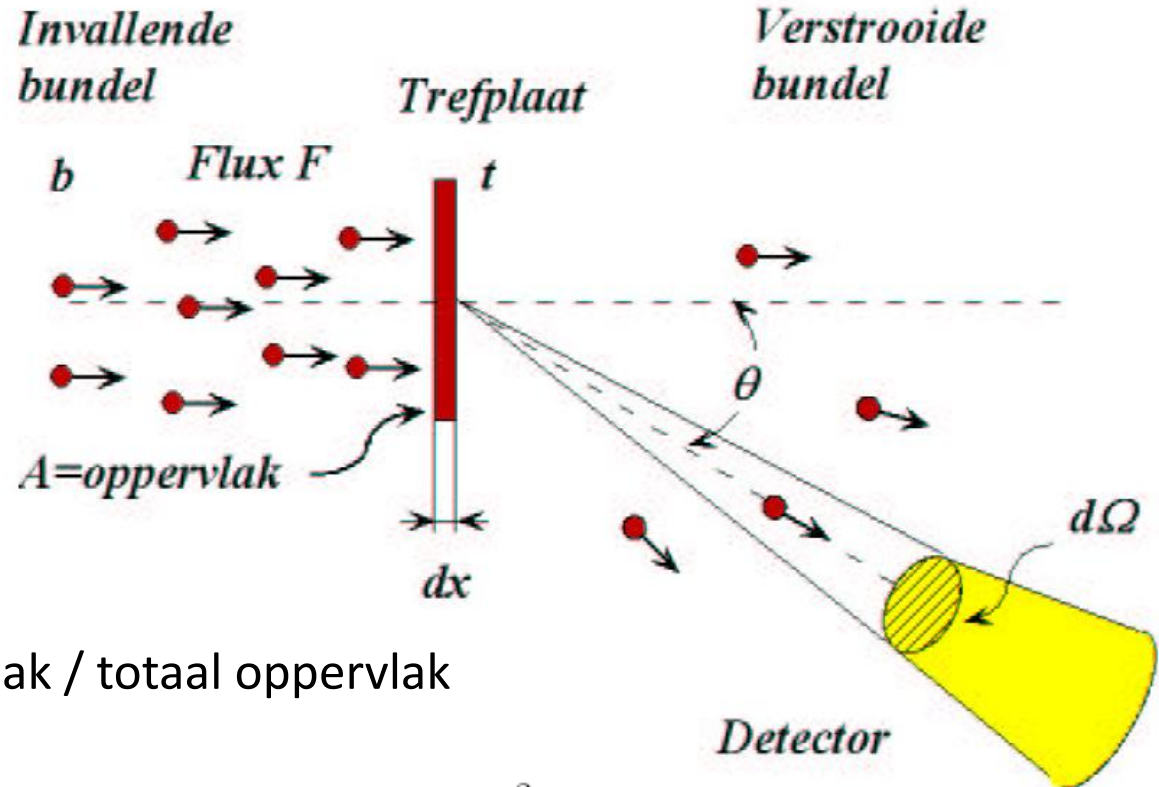
Werkzame doorsnede

Telsnelheid $A + B \rightarrow C + D$

$$\sigma \approx 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

'fixed-target' experimenten

'collider' experimenten



Reactiekans: effectief oppervlak / totaal oppervlak

$$dP = \frac{\sigma n A dx}{A} = \sigma n dx$$

$$\sigma_{\text{geometrisch}} = \pi(R_b + R_t)^2$$

$$N(d) = N_0 e^{-n\sigma_{\text{totaal}} d},$$

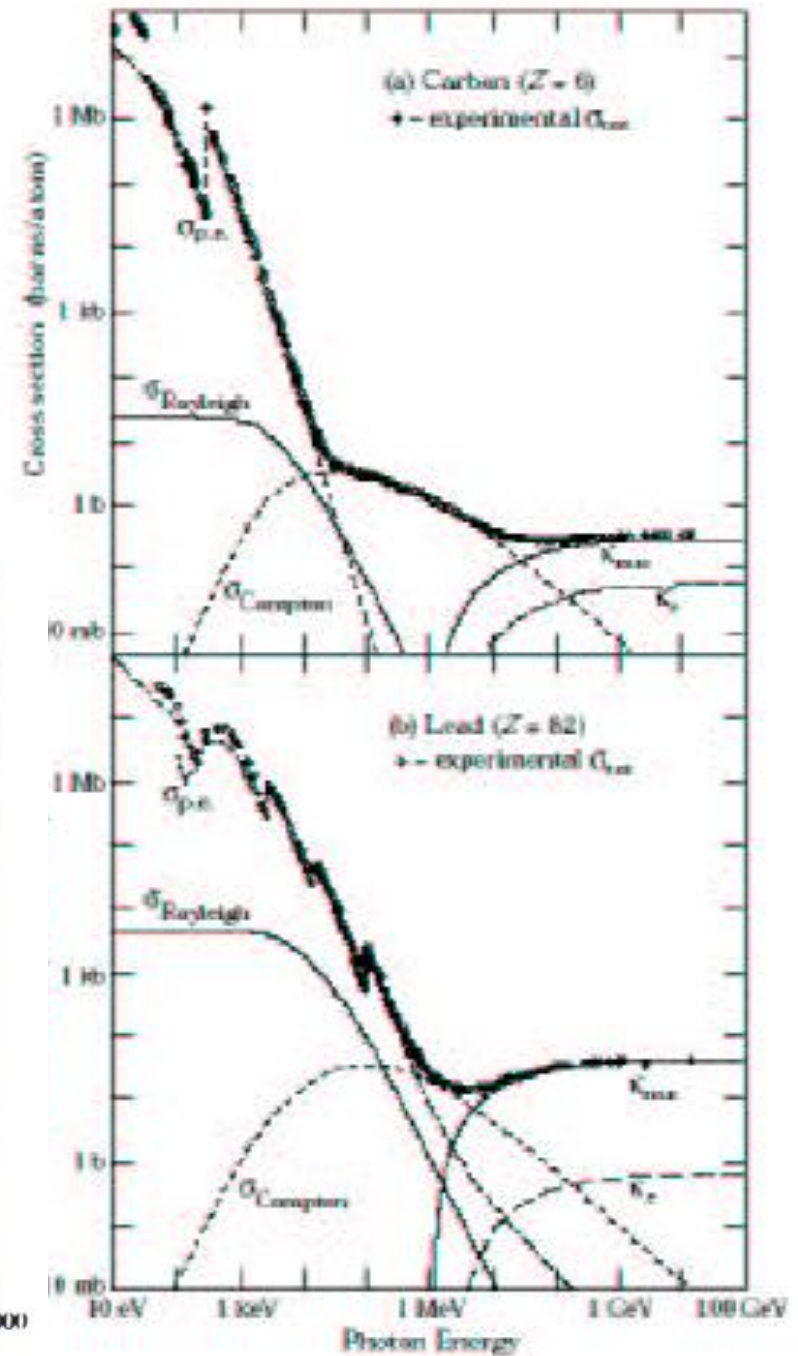
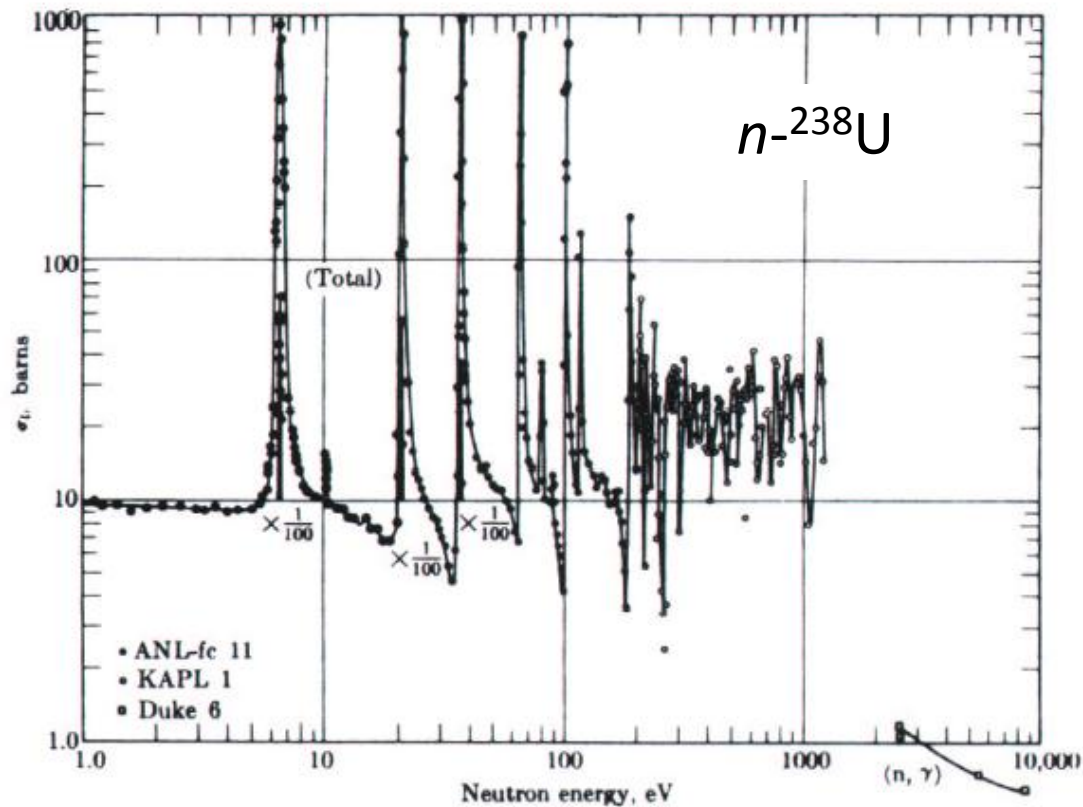
$$\sigma_{\text{totaal}} = \sum_i \sigma_i$$

$$N_i = N_0 \frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{totaal}}} (1 - e^{-n\sigma_{\text{totaal}} d})$$

$$\approx N_0 n \sigma_i d \quad (\text{voor } n\sigma_{\text{totaal}} d \ll 1)$$

Voorbeelden

Foton-koolstof/lood



Voorbeeld: verstrooiing aan een harde bol

Verstrooiing aan een massieve bol:
Berekening werkzame doorsnede

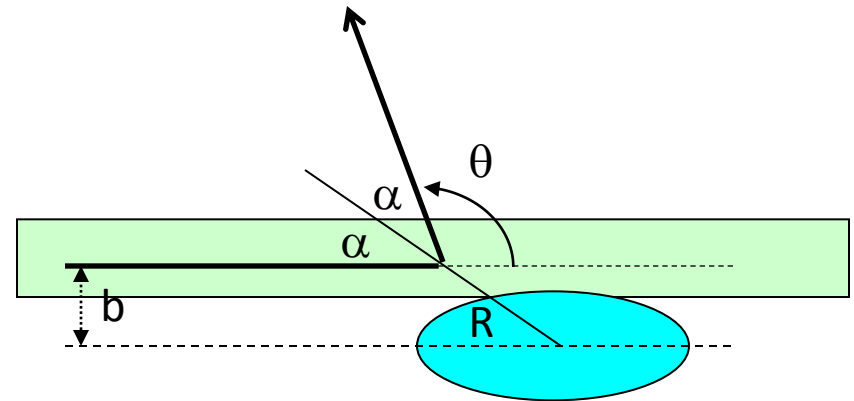
Geometrie

$$\begin{aligned} b &= R \sin \alpha \text{ en } 2\alpha + \theta = \pi \\ \sin \alpha &= \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} \\ b &= R \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Berekening werkzame doorsnede:
(vgl. Rutherford verstrooiing)

$$d\Omega = d \cos \theta d\phi$$

Totale werkzame doorsnede,
oppervlak zoals de bundel die ziet:

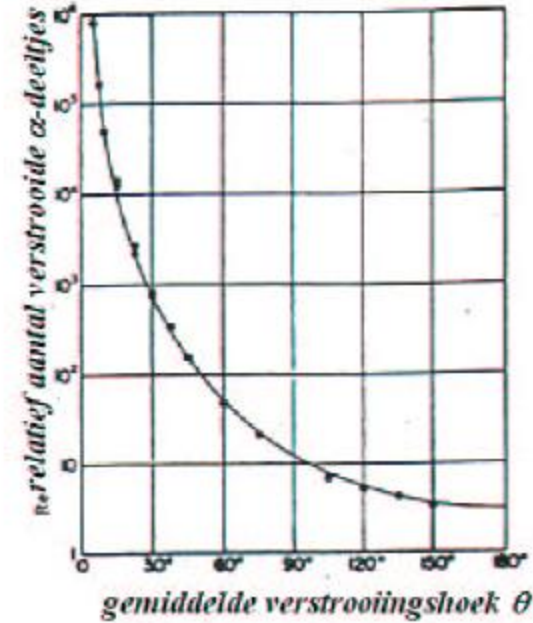
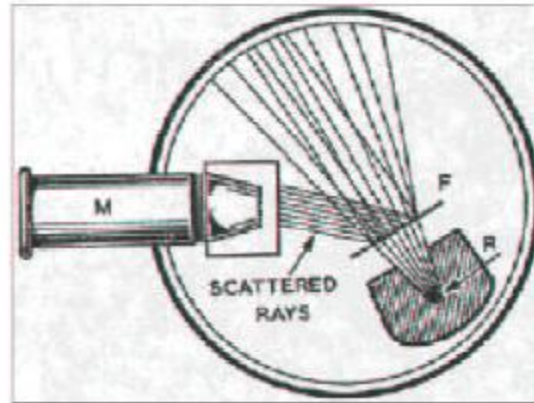


$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db = 2\pi R \cos \frac{\theta}{2} d(R \cos \frac{\theta}{2}) \\ &= \pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{2} d \cos \theta \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{d \cos \theta d\phi} = \frac{R^2}{4} \end{aligned}$$

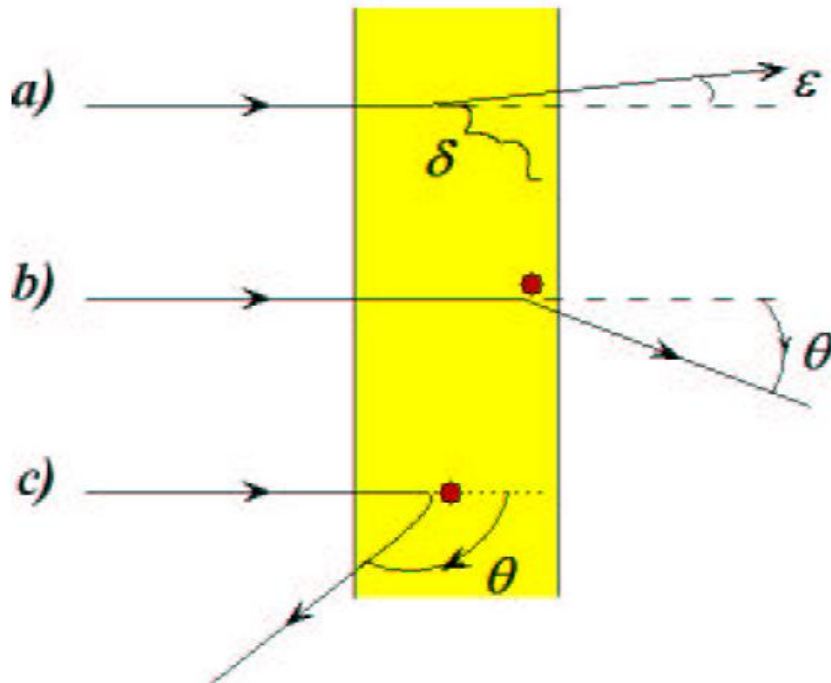
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi R^2$$

Voorbeeld: Rutherford verstrooiing

Marsden en Geiger
rond 1910



Alfa deeltjes: $T_b = 4 - 7$ MeV



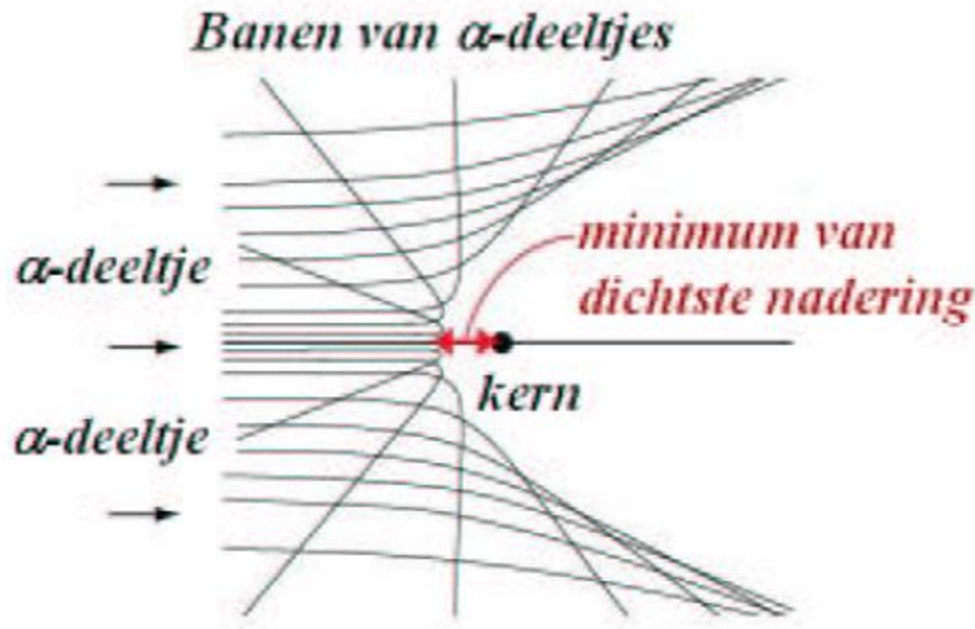
Ernest Rutherford
1908

Coulomb potentiaal

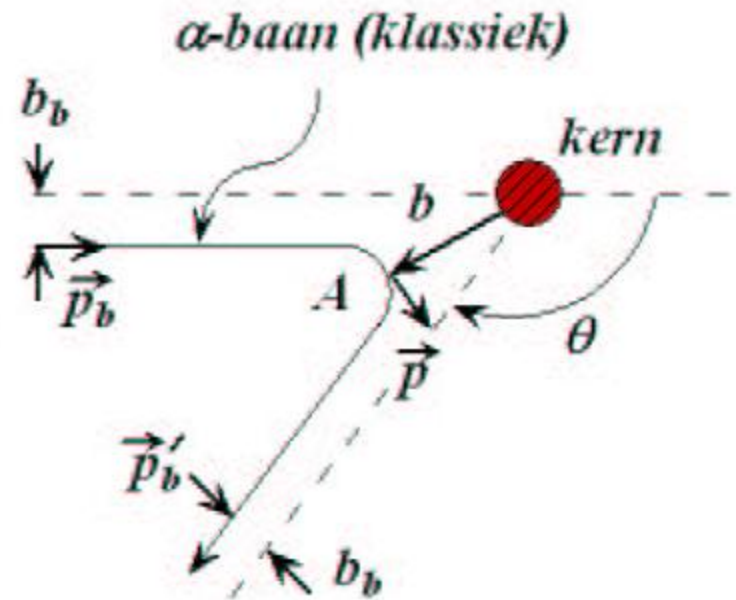
$$V(r) = \frac{Z_b Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = Z_b Z_t \alpha \hbar c \frac{1}{r} = Z_b Z_t \cdot \frac{1.4}{r} \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1/137.035\,989\,5(61)$$

Rutherford verstrooiing



Coulomb potentiaal



Klassieke mechanica

$$T_b = T + Z_b Z_t \alpha \hbar c (b)^{-1}$$

behoud van energie,

$$p_b b_b = p b$$

behoud van impulsmoment,

$$\tan \frac{\theta}{2} = Z_b Z_t \alpha \hbar c (2 b_b T_b)^{-1}$$

bewegingsvergelijking.

Werkzame doorsnede

$$d\sigma = 2\pi b_b db_b = 2\pi (Z_b Z_t \alpha \hbar c)^2 \left(\frac{1}{2T_b} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

Voor $b_b < b < b_b + db_b$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{4T_b} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Gouden regel van Fermi

In deeltjesfysica werken we voornamelijk met interacties tussen deeltjes en verval van deeltjes: overgangen tussen toestanden

Overgangswaarschijnlijkheid volgt uit Fermi's Golden Rule

$$\text{transition rate} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{phase space})$$

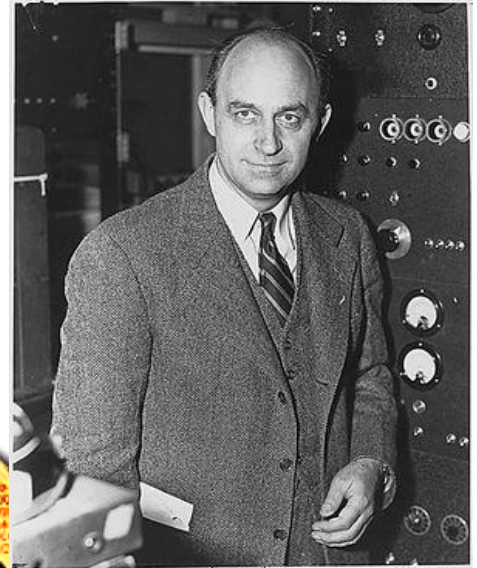
Amplitude

bevat alle dynamische informatie en berekenen we met de Feynman regels. Dit bevat de fundamentele fysica.

Faseruimte

bevat alle kinematische informatie en hangt af van massa's, energieën en impulsen

Voor de afleiding: zie dictaat quantummechanica.
Verder eisen wij een Lorentzinvariante beschrijving.



Enrico Fermi
1938

Verstrooiingstheorie

- Aantal verstrooide deeltjes $n(\theta, \phi)d\Omega = |\mathbf{j}_{\text{in}}|d\sigma(\theta, \phi)$
 - Inkomende flux $\mathbf{j}_{\text{in}} = \rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{p}/m$
 - Ruimtehoek $d\Omega$
 - Differentiële werkzame doorsnede $d\sigma$
- Gouden regel $n(\theta, \phi)d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left[|\langle \phi_f | V | \phi_i \rangle|^2 \rho(E') \right]_{E'=E+Q}$
 - Vlakke golven voor begin en eindtoestand $\phi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$ en $\phi_e(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$
 - Dichtheid van eindtoestanden $\rho(\mathbf{p}')d^3\mathbf{p}' = \frac{1}{\rho} \frac{p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp' d\Omega' = \frac{1}{\rho} \frac{mp'}{(2\pi\hbar)^3} dE' d\Omega' = \rho(E') dE' d\Omega'$
- We vinden $d\sigma(\theta, \phi) = d\Omega' \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{p'}{p} \left| \int e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|_{E'=E+Q}^2$
 - Gebruik definitie van Fouriertransformatie $\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$
 - Bornse benadering 

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{p'}{p} \left| \frac{\tilde{V}(\mathbf{q})}{\hbar} \right|^2$$

Elastische verstrooiing

- We hadden $\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{p'}{p} \left|\frac{\tilde{V}(\mathbf{q})}{\hbar}\right|^2$
- Elastische verstrooiing
 - Impulsoverdracht $\mathbf{q}^2 = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = p^2 + p'^2 + 2pp' \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2 \theta/2$
 - Centrale potentiaal $V(\mathbf{r}) = V(r)$

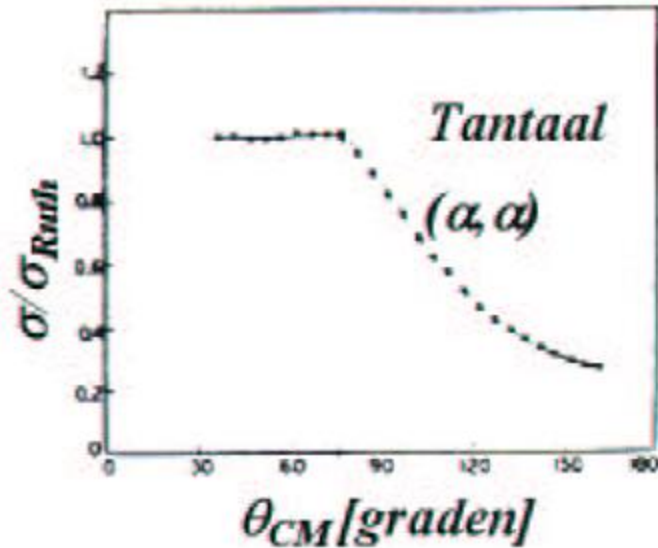
⇒ $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int V(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 r^2 V(r) e^{iqr \cos \alpha} d \cos \alpha = \frac{4\pi\hbar}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr$

- Coulomb potentiaal $V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$
 - Gebruik afschermingsparameter a $\tilde{V}(\mathbf{q}) = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2 + (\hbar/a)^2}$
 - Neem $|\mathbf{q}| \gg \frac{\hbar}{a} \simeq 2 \times 10^{-3} \frac{\text{MeV}}{c}$ $\tilde{V}(\mathbf{q}) = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2} = 4\pi Z\alpha\hbar c \frac{\hbar^2}{|\mathbf{q}|^2}$
 - Niet-relativistisch $|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}| \sin \frac{\theta}{2}$ en in zwaartepuntsysteem $\frac{\mathbf{q}^2}{2m} = 4 \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \sin^2(\theta/2) = 4T \sin^2(\theta/2)$
 - Rutherford werkzame doorsnede $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T \sin^2(\theta/2)}\right)^2$

Rutherford verstrooiing

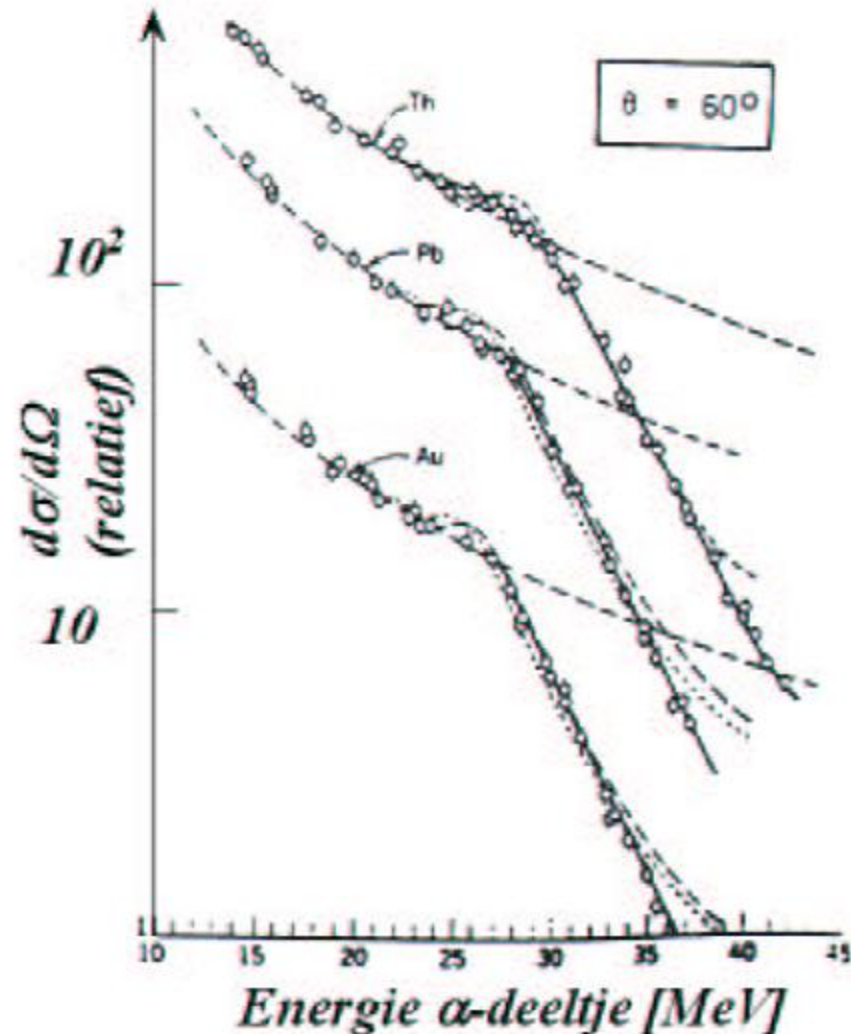
Geldig voor $b > b_{min} = R_a + R_t$ ofwel

$$\sin \frac{\theta_{min}}{2} = \left| 1 - \frac{2T_b b_{min}}{Z_b Z_t \alpha \hbar c} \right|^{-1}$$



Meet interactieafstand b_{min} versus A

Eigenlijk $b_{min} \approx R_a + R_t + R_s$



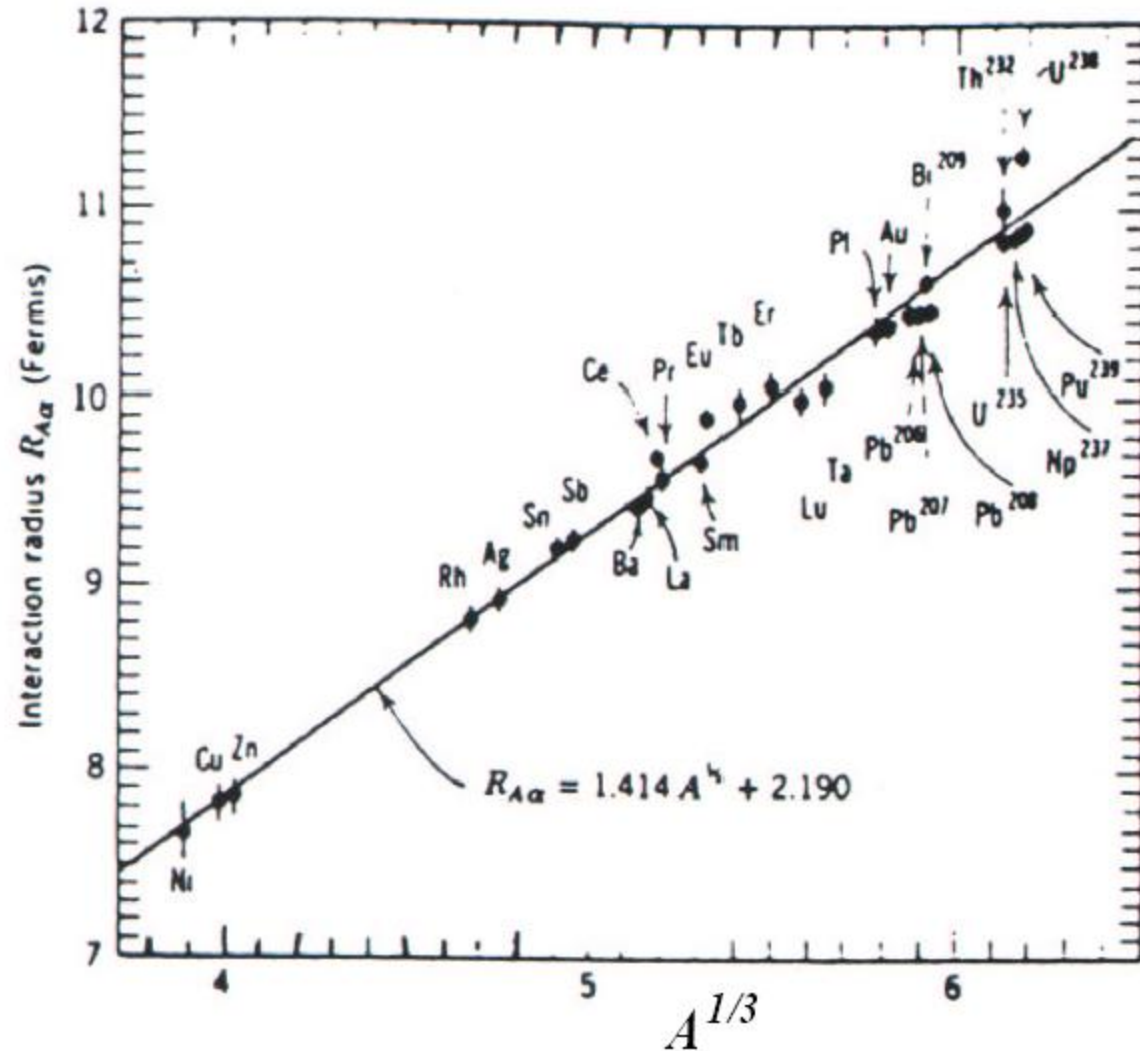
Rutherford verstrooiing

Plot b_{min} versus $A^{1/3}$

Er geldt $R \simeq 1.4 \text{ fm } \sqrt[3]{A}$

Goede beschrijving dus

- Coulombwet geldig op korte afstand (femtometers)
- Sterke WW korte dracht
- Alle lading zit in kleine bol



Rutherford vond

$$V_{\text{kern}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \propto A, \quad \text{met } A = N + Z$$

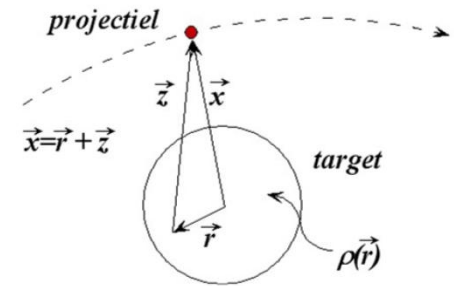


$$\rho_{\text{kern}} \simeq 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Elastische elektronen verstrooiing

- We hadden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{p'}{p} \left| \frac{\tilde{V}(\mathbf{q})}{\hbar} \right|^2$$



- Uitgebreide ladingsverdeling

- Ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r})$
$$V(\mathbf{r}) = Z\alpha\hbar c \iiint \rho(\mathbf{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r},$$
- Fourier getransformeerde
$$V(\mathbf{q}) = Z\alpha\hbar c \iiint \iiint e^{i\vec{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \rho(\mathbf{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r} d\mathbf{x}$$

$$= Z\alpha\hbar c \iiint \frac{e^{-z/a}}{z} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}/\hbar} d\mathbf{z} \iiint \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r}$$

$$= \tilde{V}(\mathbf{q})(\text{punt}) F(\mathbf{q}),$$

➡
$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint F(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{q}$$

- Modelonafhankelijke meeting van de ladingsverdeling

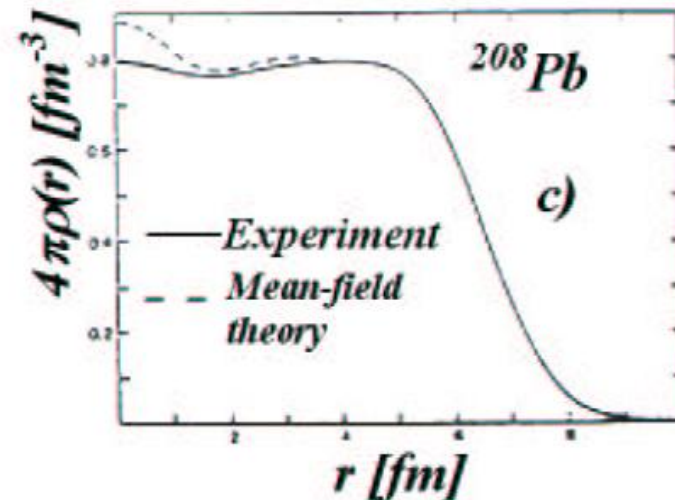
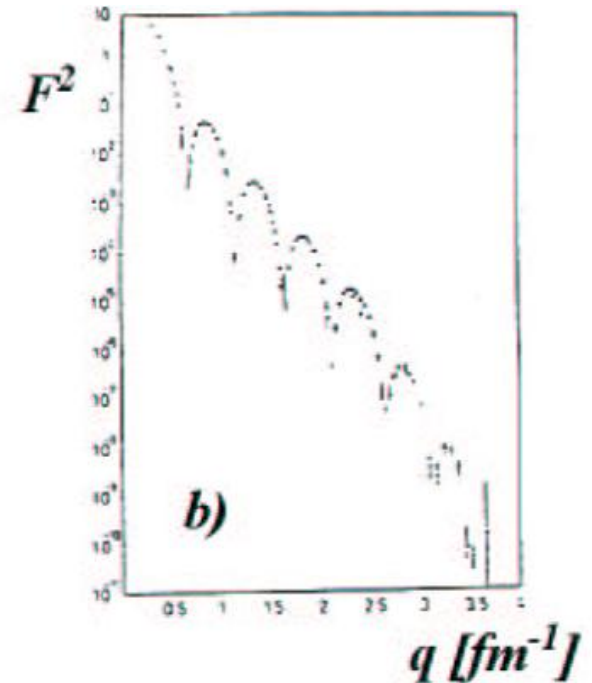
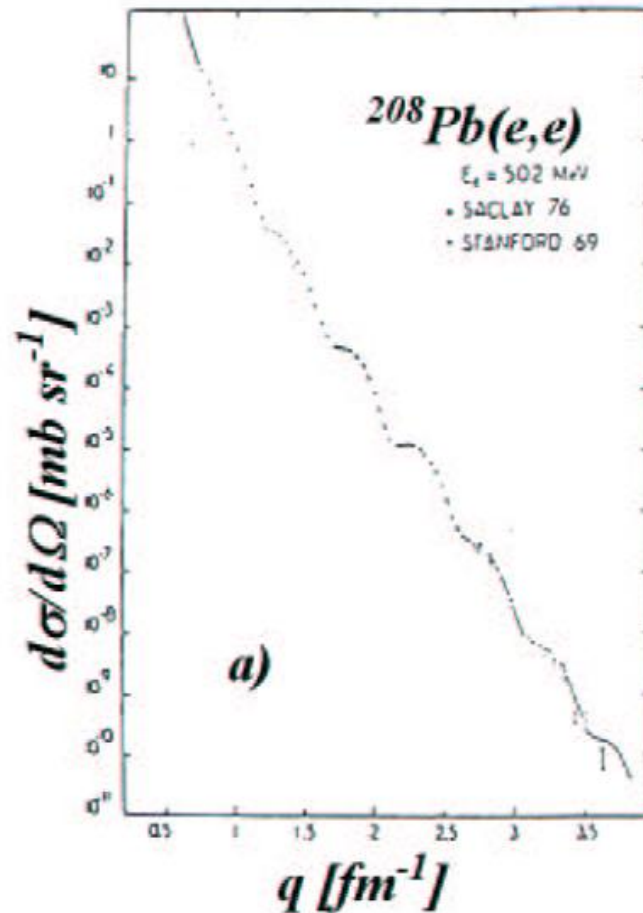


Robert Hofstadter
1961

Elastische elektronen verstrooiing - Voorbeelden

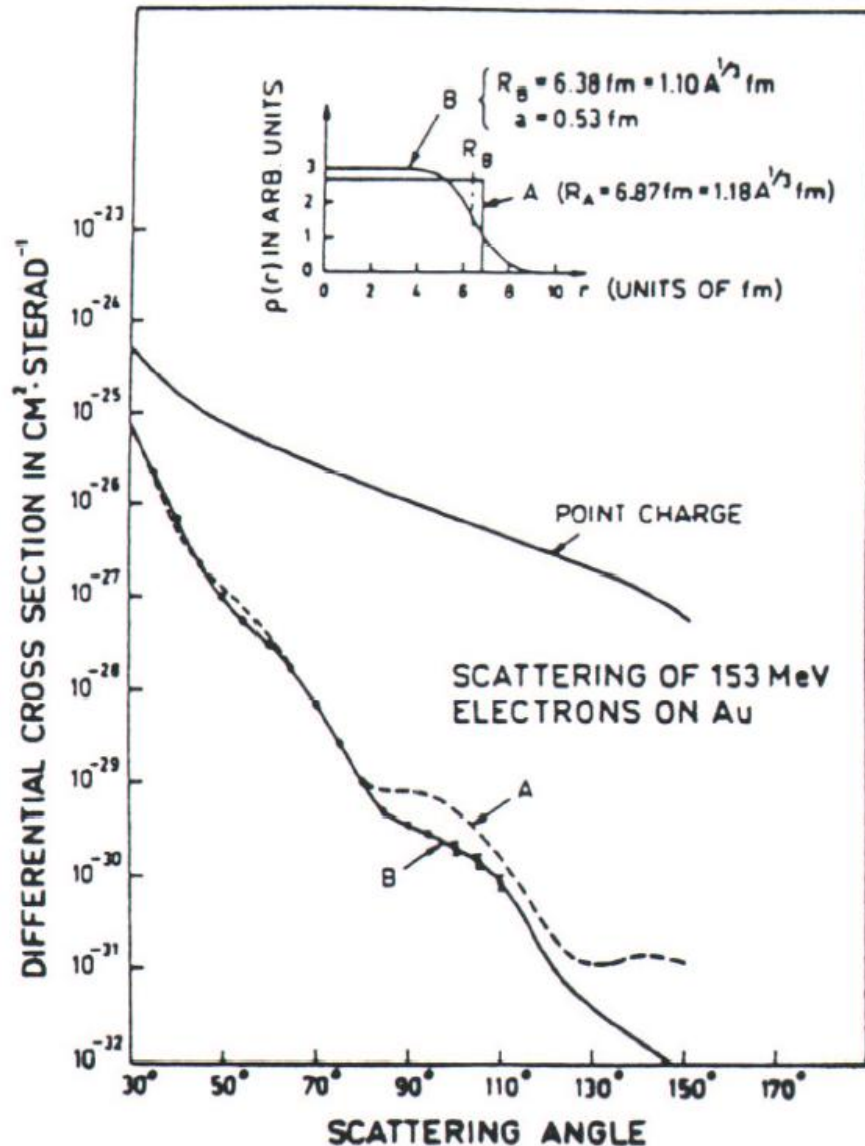
Elektronen
aan lood:

- 502 MeV
- ^{208}Pb spinloos
- 12 decaden



Model-onafhankelijke informatie over
ladingsverdeling van nucleon en kernen

Elastische elektronen verstrooiing - Voorbeelden

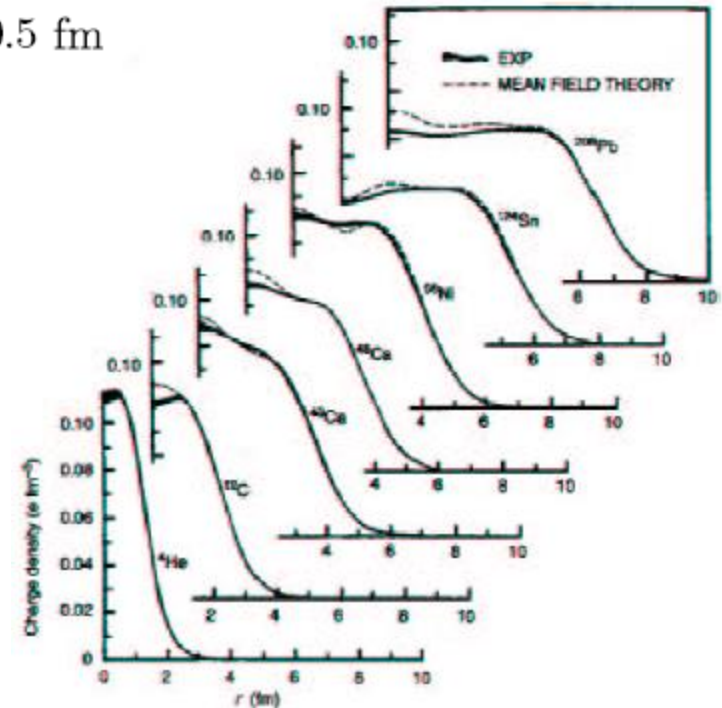


Elektron-goud verstrooiing
- energie: 153 MeV

ladingsverdeling:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$R \simeq 1.2 \text{ fm } \sqrt[3]{A} - 0.48 \text{ fm}$, voor $A \gg 1$
 $a \simeq 0.5 \text{ fm}$



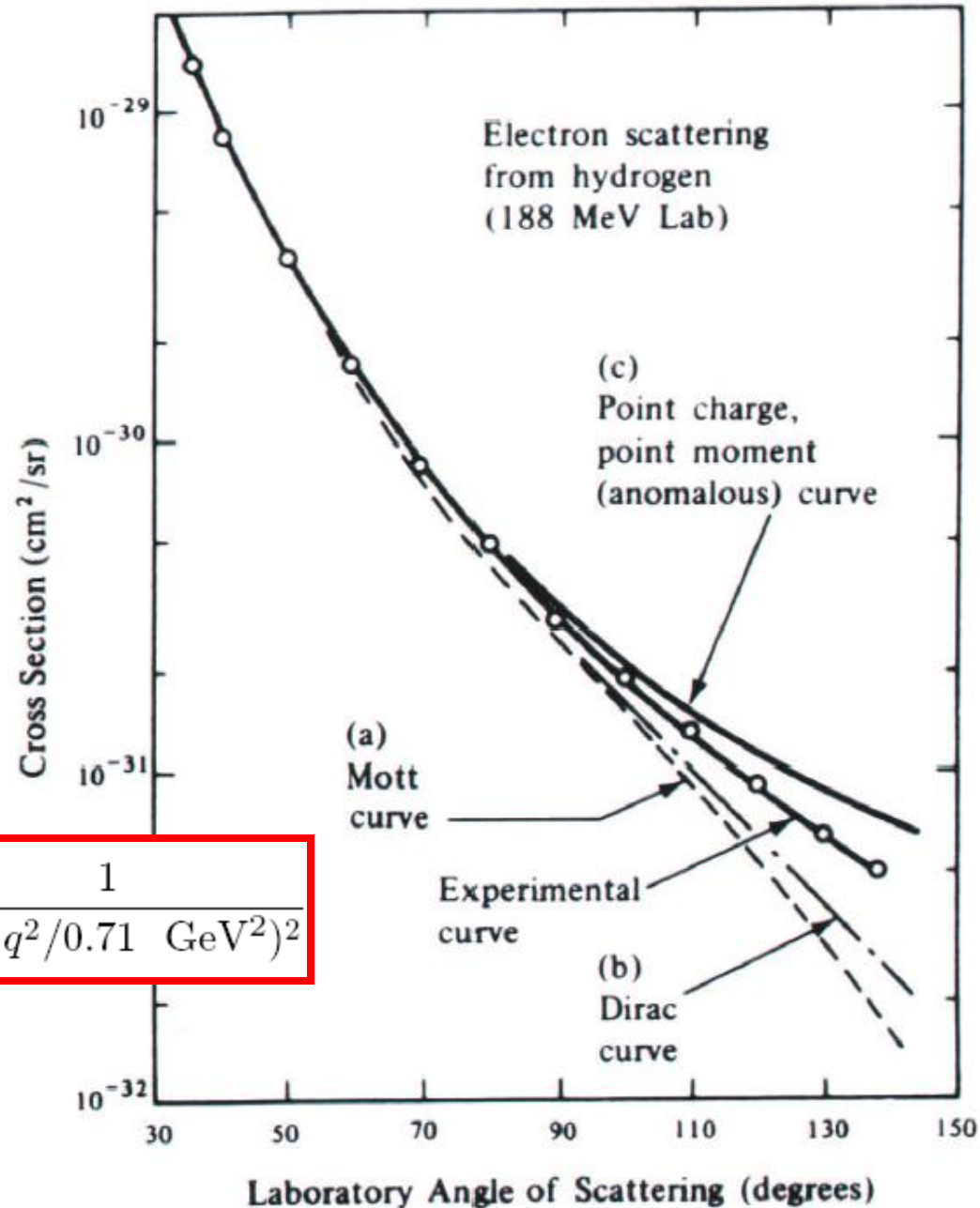
Ladingsdichtheid is constant!

Elastische elektron-proton verstrooiing

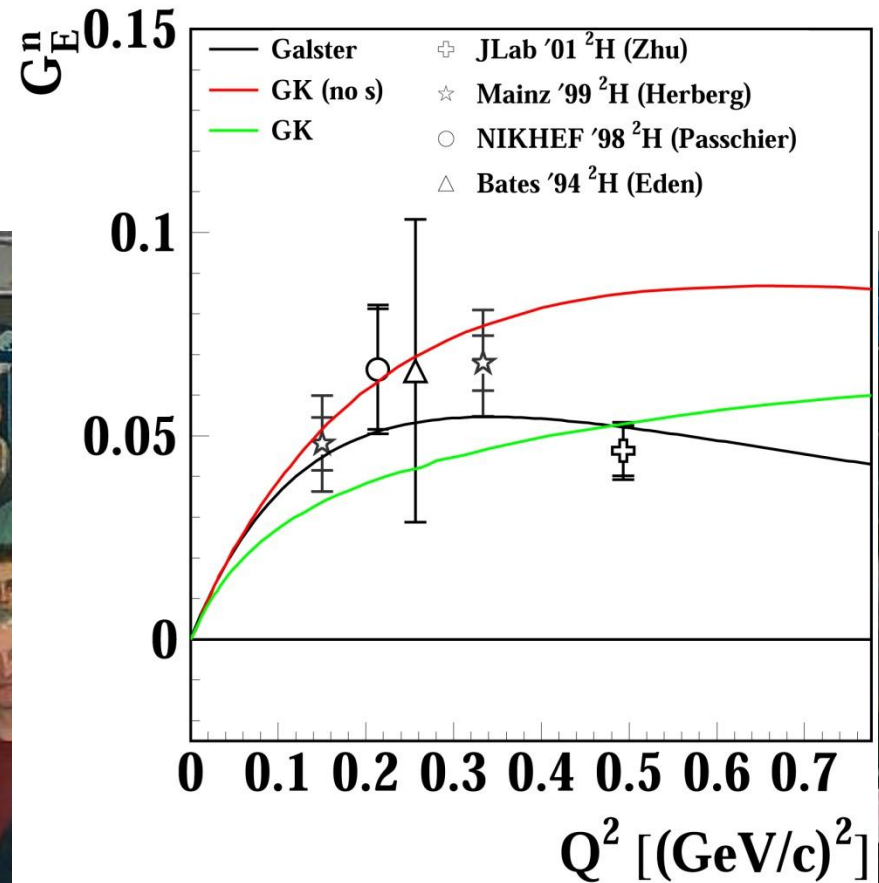
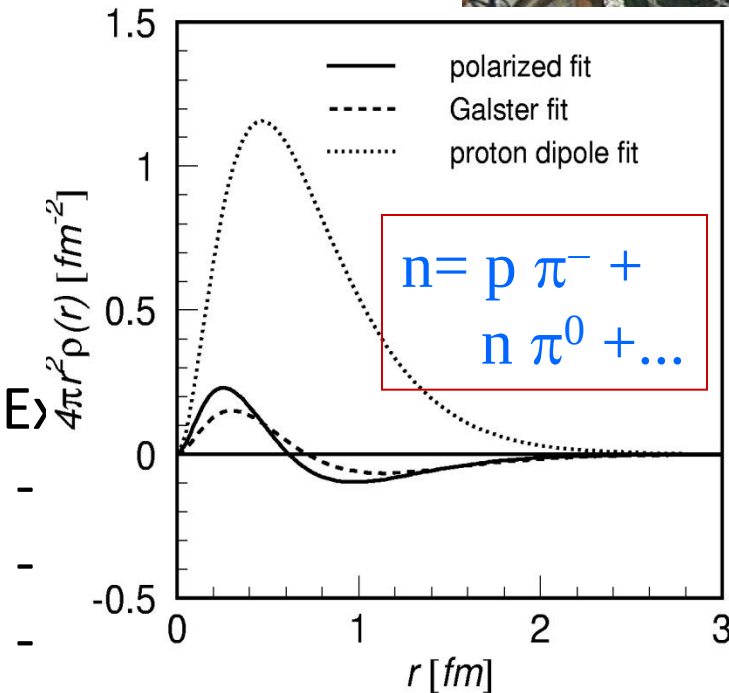
Proton structuur

- niet puntvormig
- geen Dirac deeltje ($g=2$)
- straal is 0.8 fm
- exponentiele vormfactor

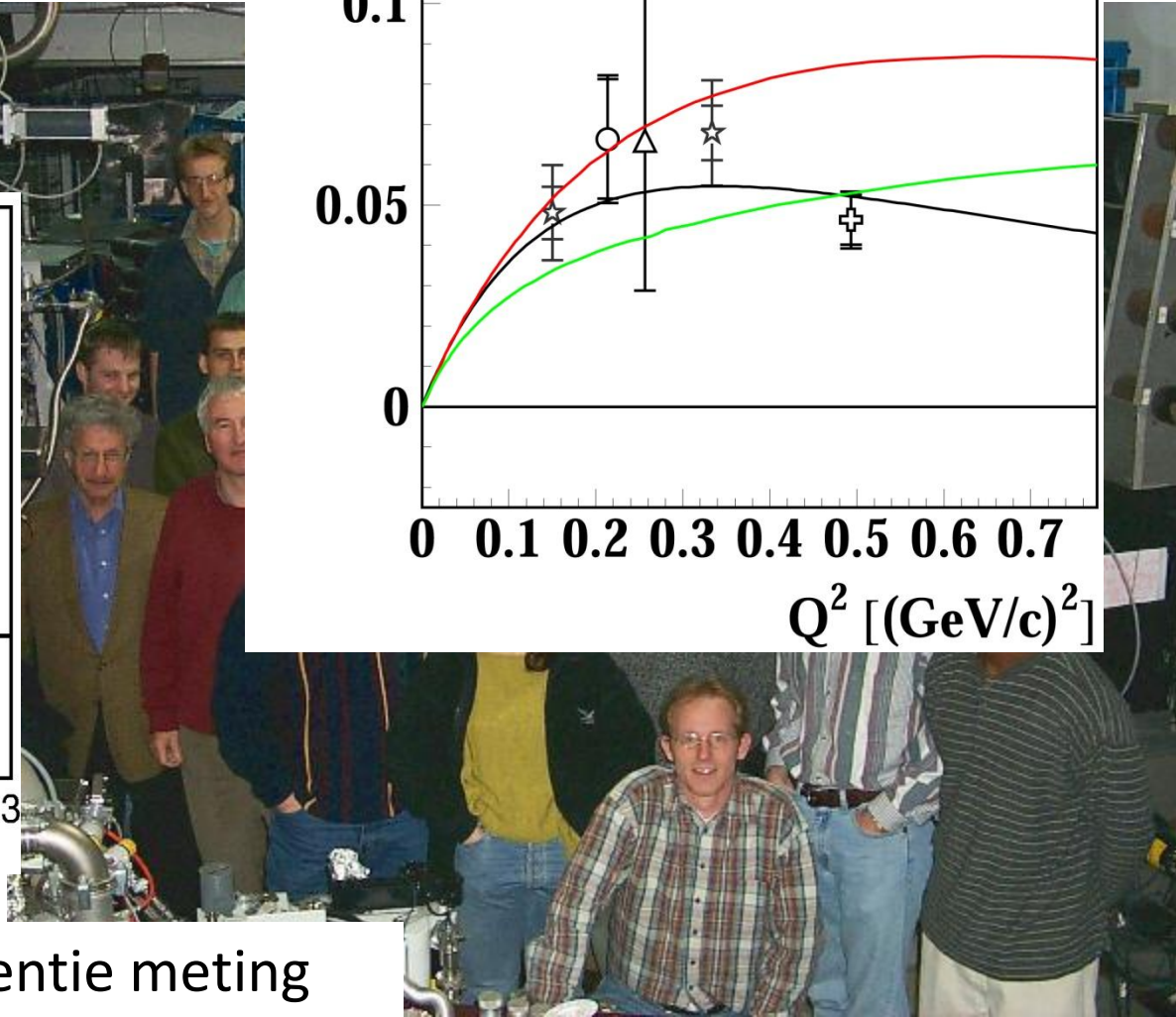
$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{|\mu_p|} = \frac{G_M^n(q^2)}{|\mu_n|} \simeq \frac{1}{(1 - q^2/0.71 \text{ GeV}^2)^2}$$



Ladingsverdeling van het neutron



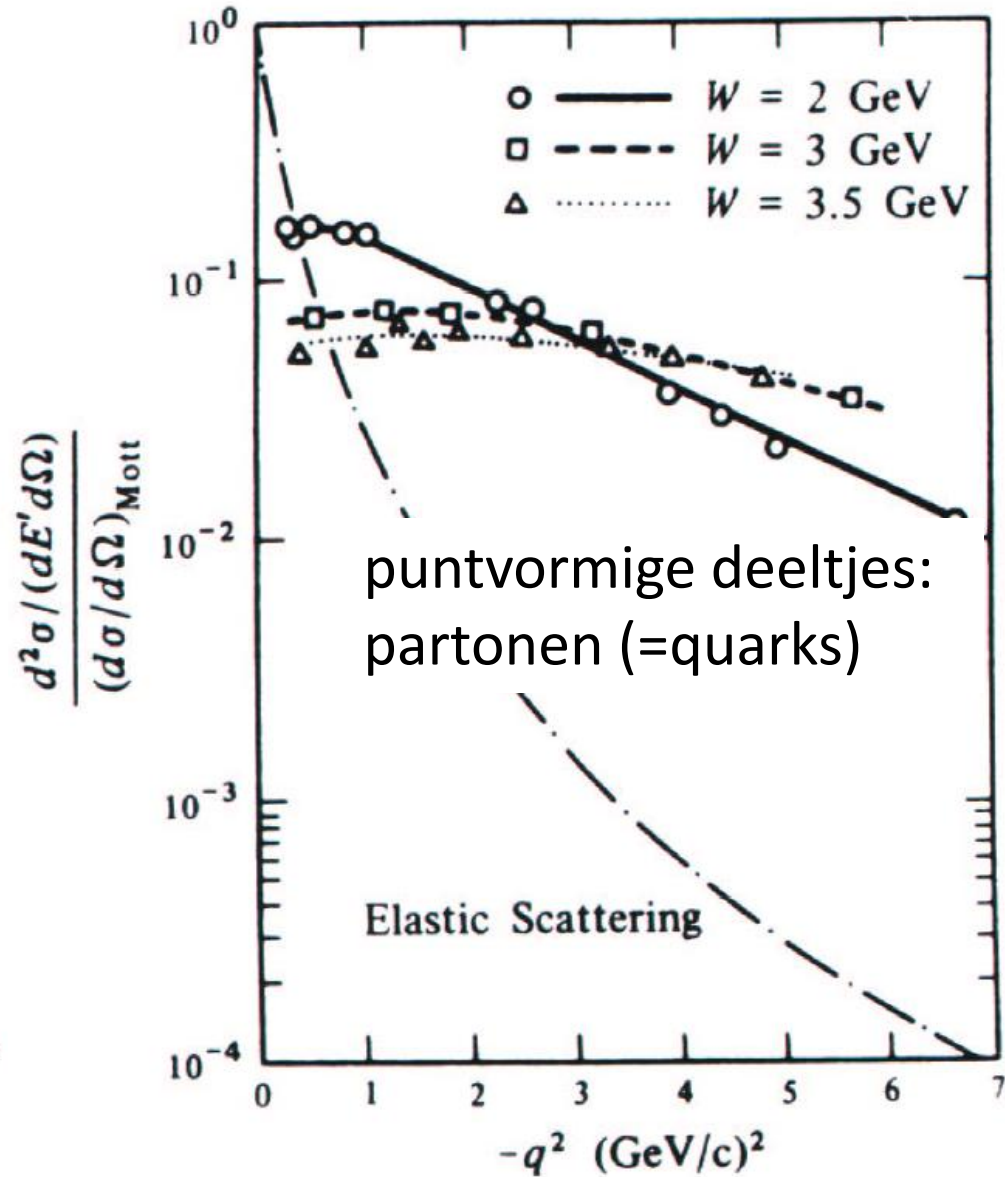
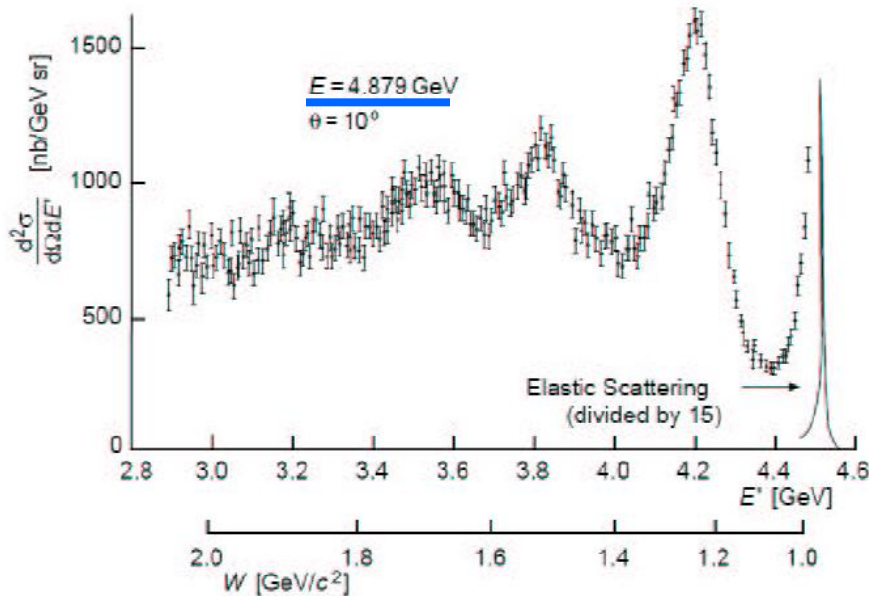
- D-polarisatie 0.7
- elektron-neutron coincidentie meting



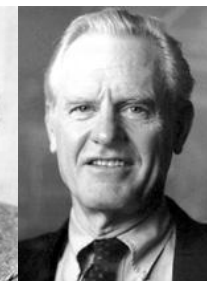
Diep-inelastische verstrooiing

DIS definitie:

- Vierimpuls $Q^2 > 1 \text{ (GeV/c)}^2$
- Invariante massa $W > 2 \text{ GeV}$



DIS – Bjørken schaling



Verstrooiing van puntvormige objecten in het nucleon

Parton model

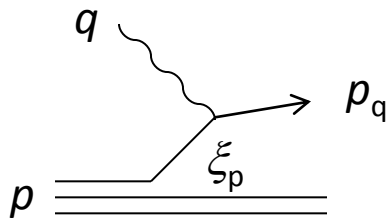
Quark model

Friedman, Kendall, Taylor; 1990

Energieverlies bij elastische verstrooiing $E_f = E_i - \nu = E_i - \frac{Q^2}{2M}$

Bjørken schaal variabele $x \equiv \frac{Q^2}{2M\nu}$

Impuls gedragen door quarks



Infinite momentum frame:

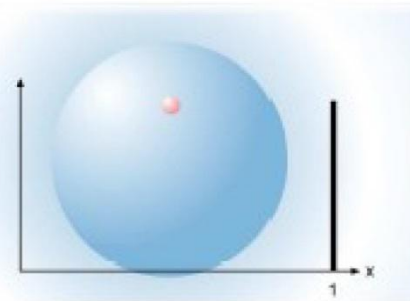
Geen p_T en $m_q = m_p = 0$

$$q + \xi p = p_q \rightarrow -q^2 = Q^2 = 2\xi p \cdot q$$

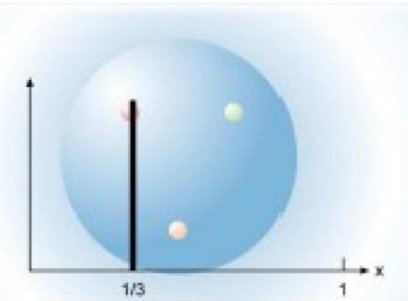
$$\xi_p = Q^2 / 2p_q \cdot q$$

LAB: $x = Q^2 / 2M\nu$ neem $\nu = Q^2 / 2m_q$

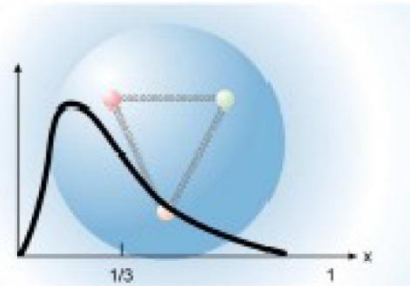
a)



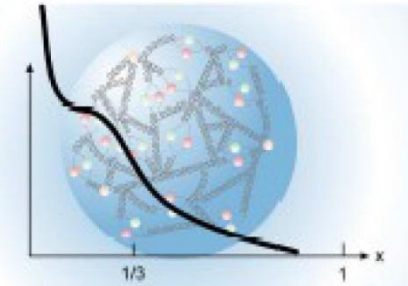
b)



c)



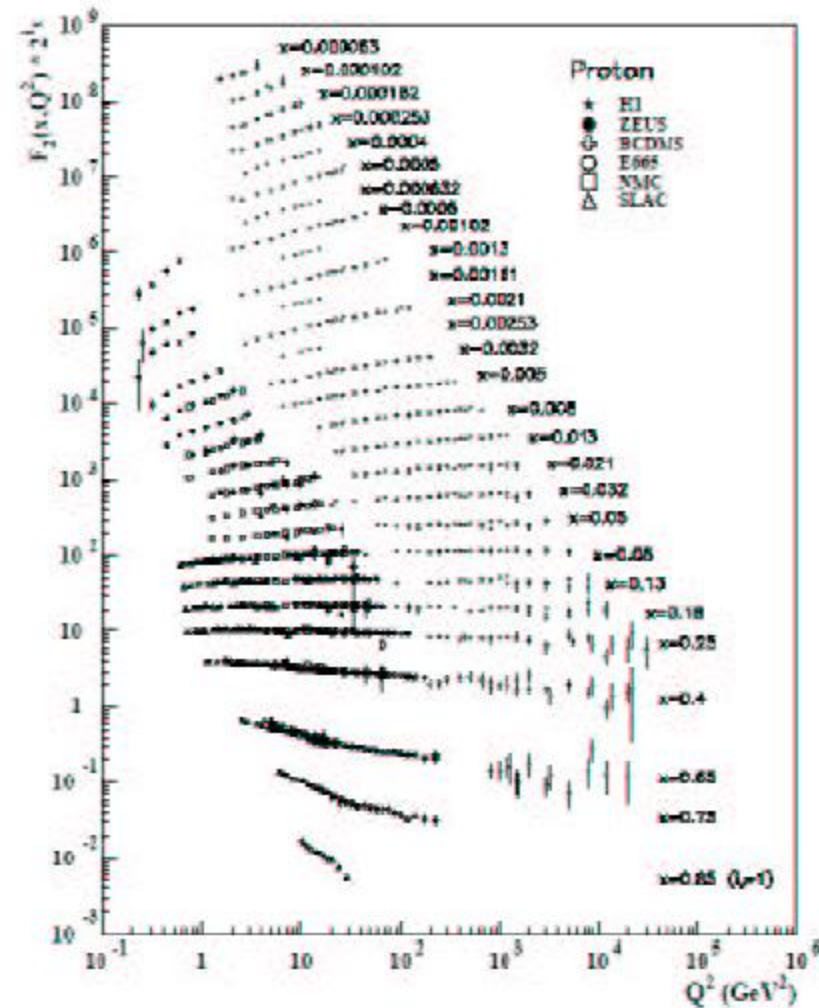
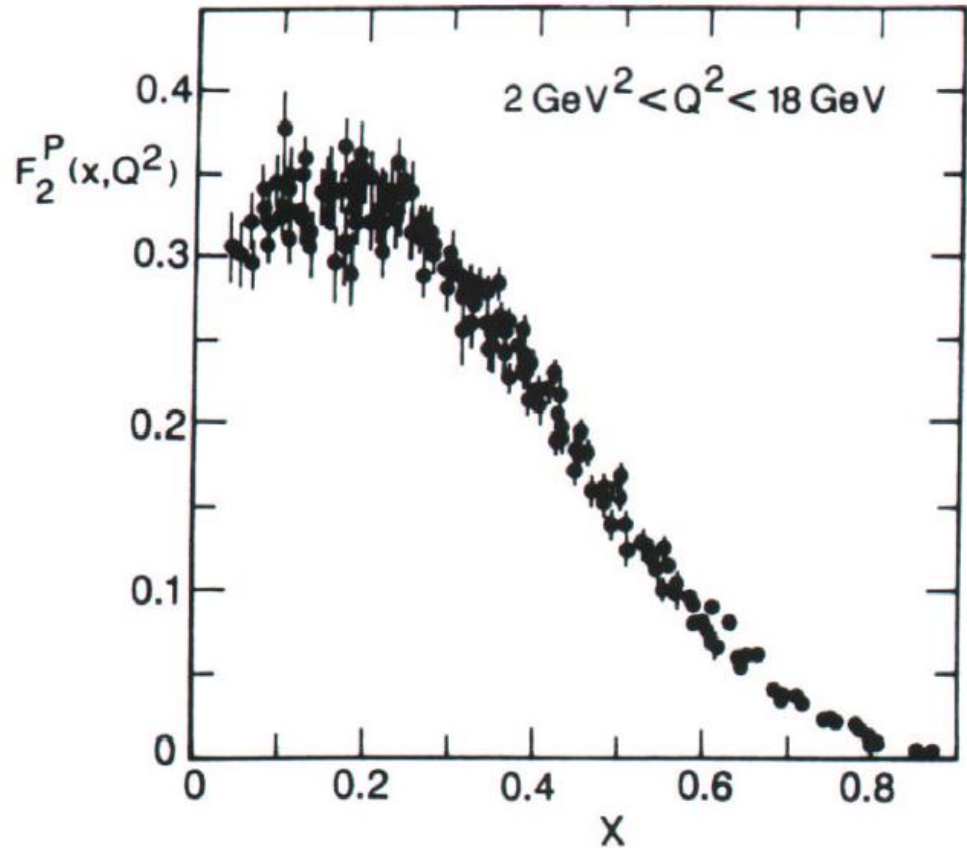
d)



DIS – Bjørken schaling

Schaling:

structuurfuncties enkel
functie van x



$$F_2(x) = x \sum_f e_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x))$$

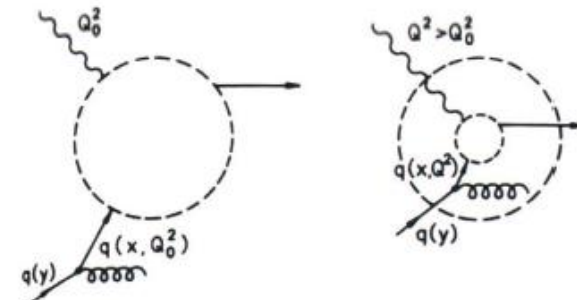
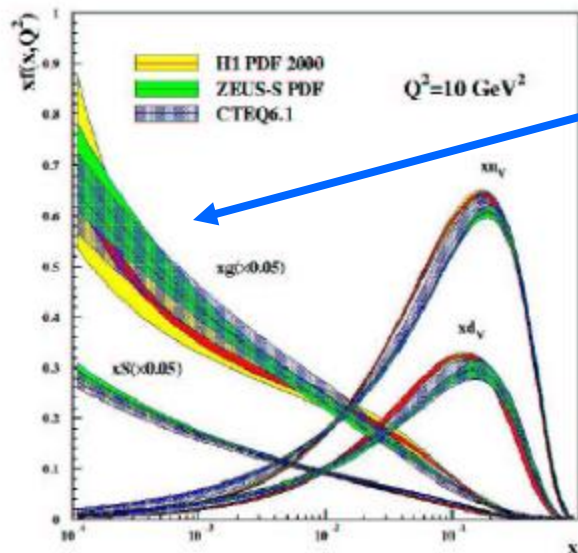
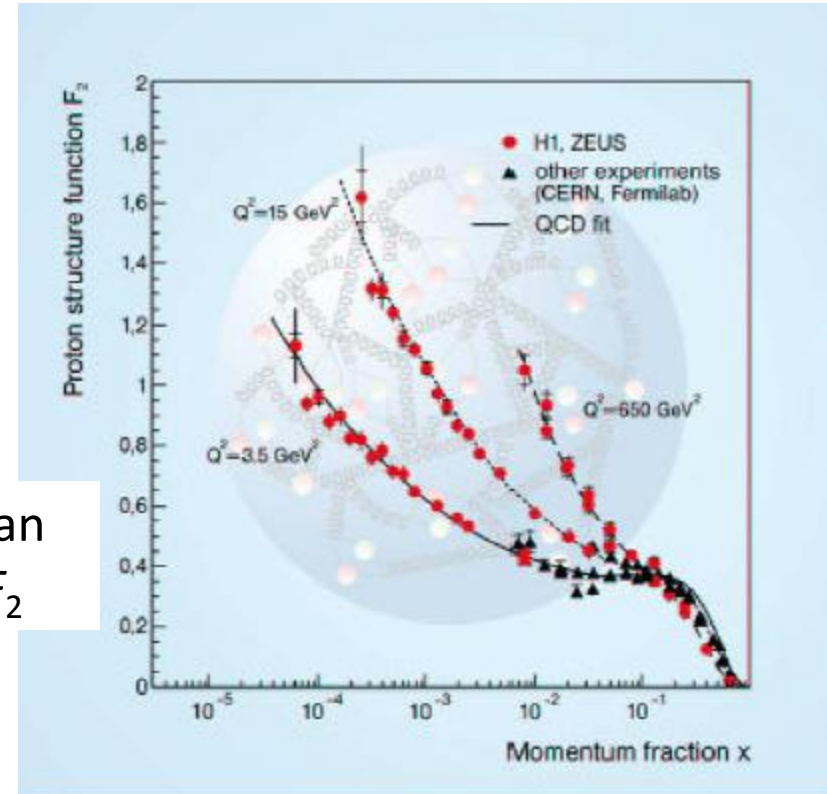
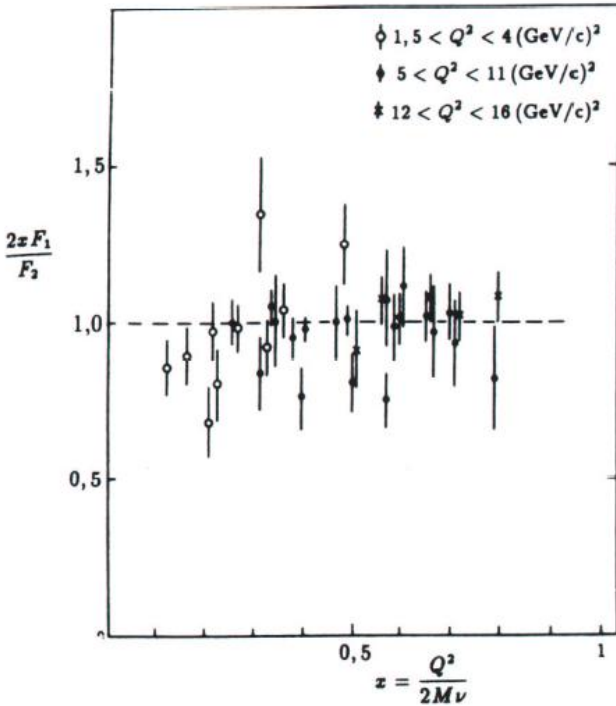
DIS – Bjørken schaling

$$2xF_1(x) = F_2(x) \quad \text{Callan-Gross relatie}$$

Quarks
spin 1/2

Decompositie:

Gluon bijdrage van
 Q^2 evolutie van F_2



Elektron-positron annihilatie

Muon productie

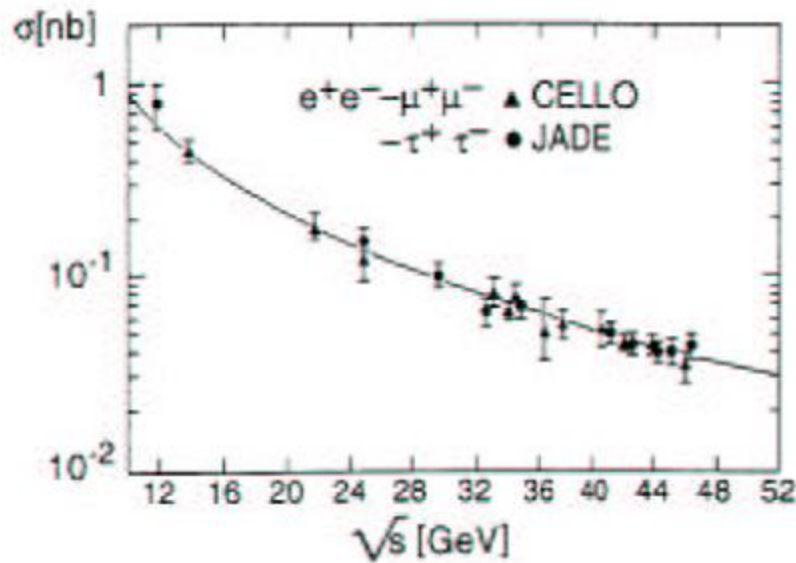
$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = \frac{\pi\alpha^2}{8E^2}(1 + \cos^2\theta)$$

spinfactor

integreer

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = \sigma(e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-) = \frac{21.7}{E^2} \text{ nanobarns}$$



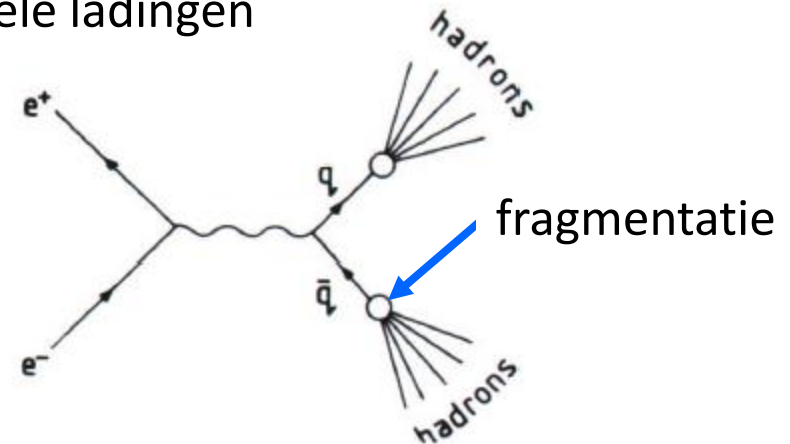
Elektron, muon en tau zijn identiek, afgezien van massa en levensduur

fractionele ladingen

Twee-jet productie

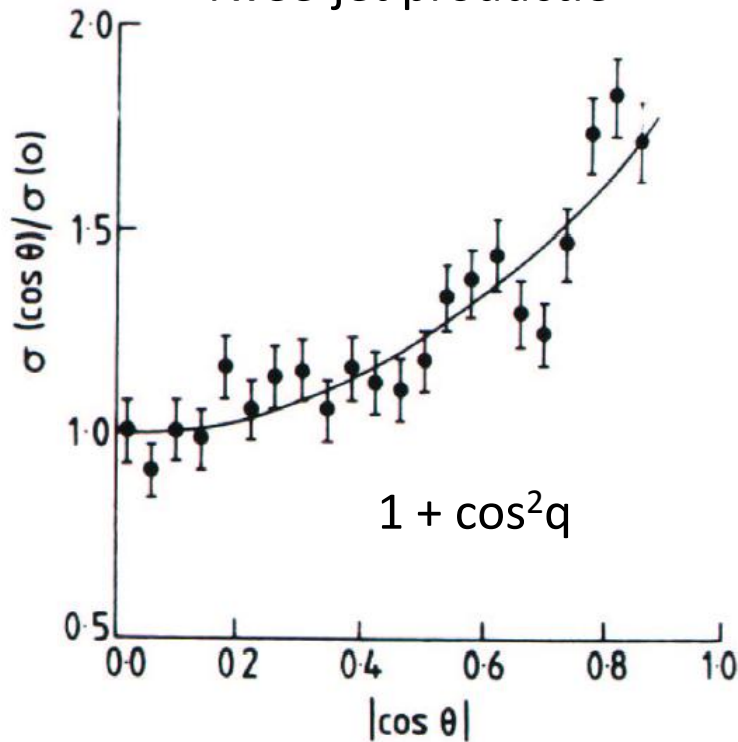
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{3\pi e_q^2 \alpha^2}{8E^2}(1 + \cos^2\theta)$$

kleur



Elektron-positron annihilatie

Twee-jet productie



Quarks hebben spin 1/2

Quarks hebben kleur en
fractionele lading

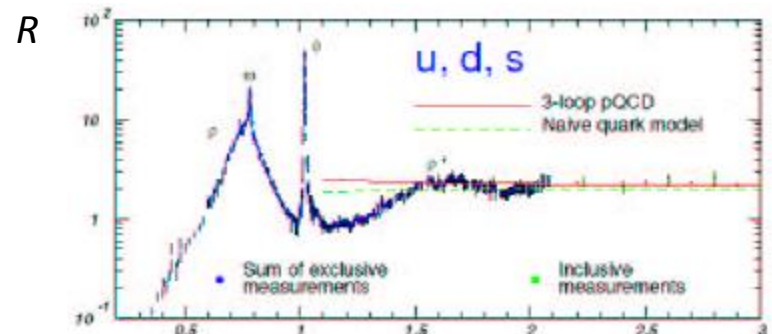
$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{3\pi e_a^2 \alpha^2}{8E^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = \frac{\pi \alpha^2}{8E^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

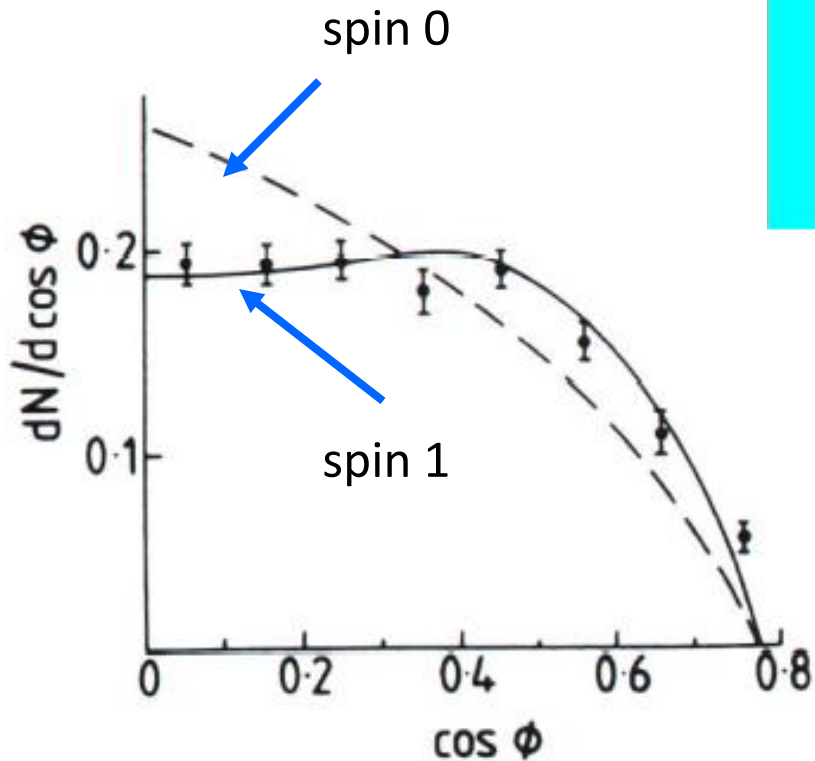
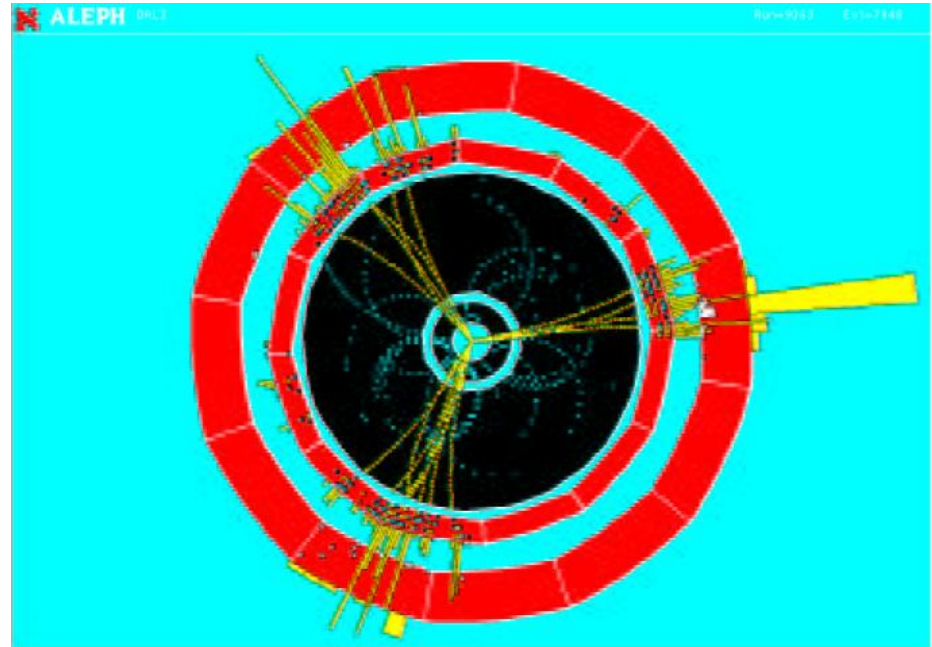
Voor $E < 3.5$ GeV

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = 2$$



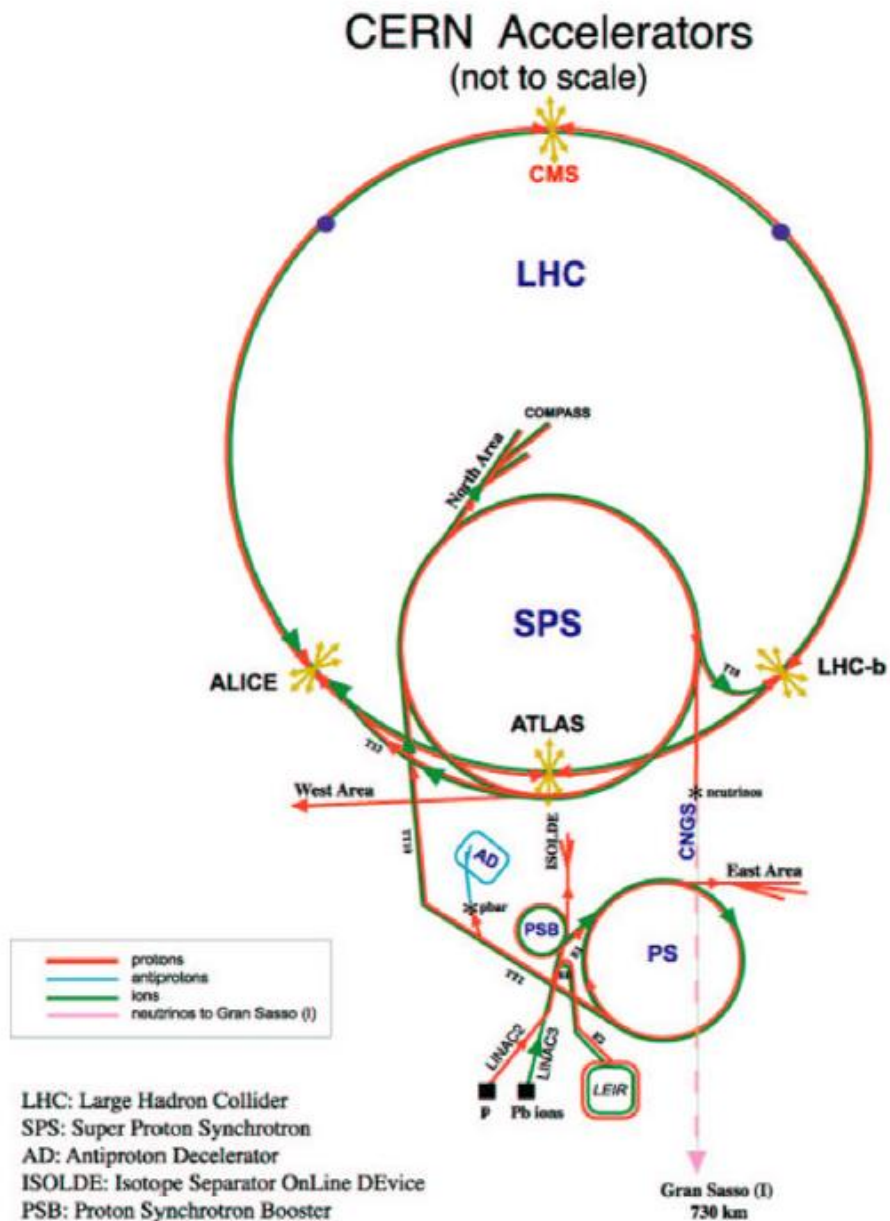
Elektron-positron annihilatie

Drie-jet productie



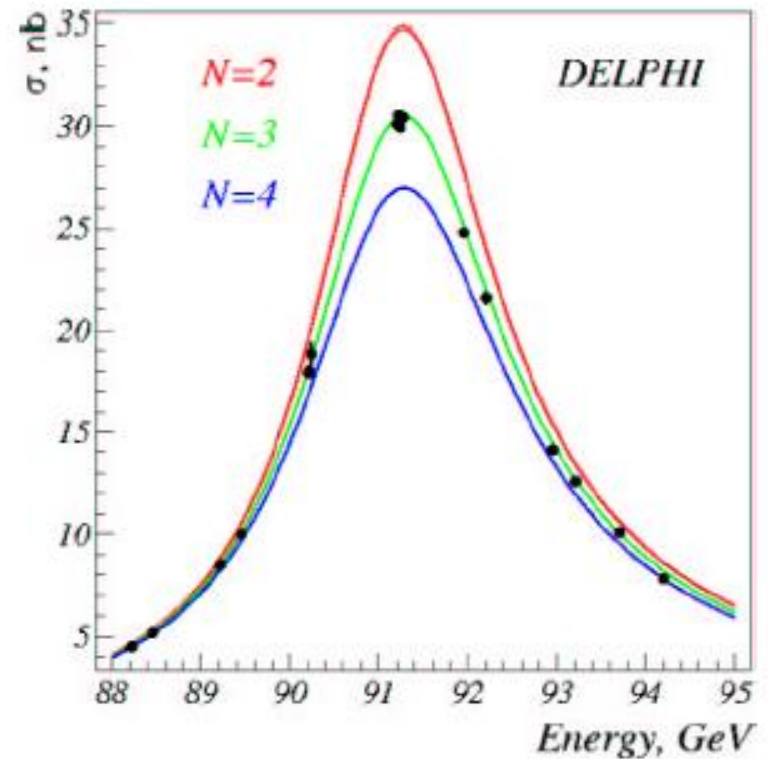
Gluonen hebben spin 1

Z^0 -resonantie



LHC: Large Hadron Collider
SPS: Super Proton Synchrotron
AD: Antiproton Decelerator
ISOLDE: Isotope Separator OnLine DEvice
PSB: Proton Synchrotron Booster
PS: Proton Synchrotron
LINAC: LINear ACcelerator
LEIR: Low Energy Ion Ring
CNGS: Cern Neutrinos to Gran Sasso

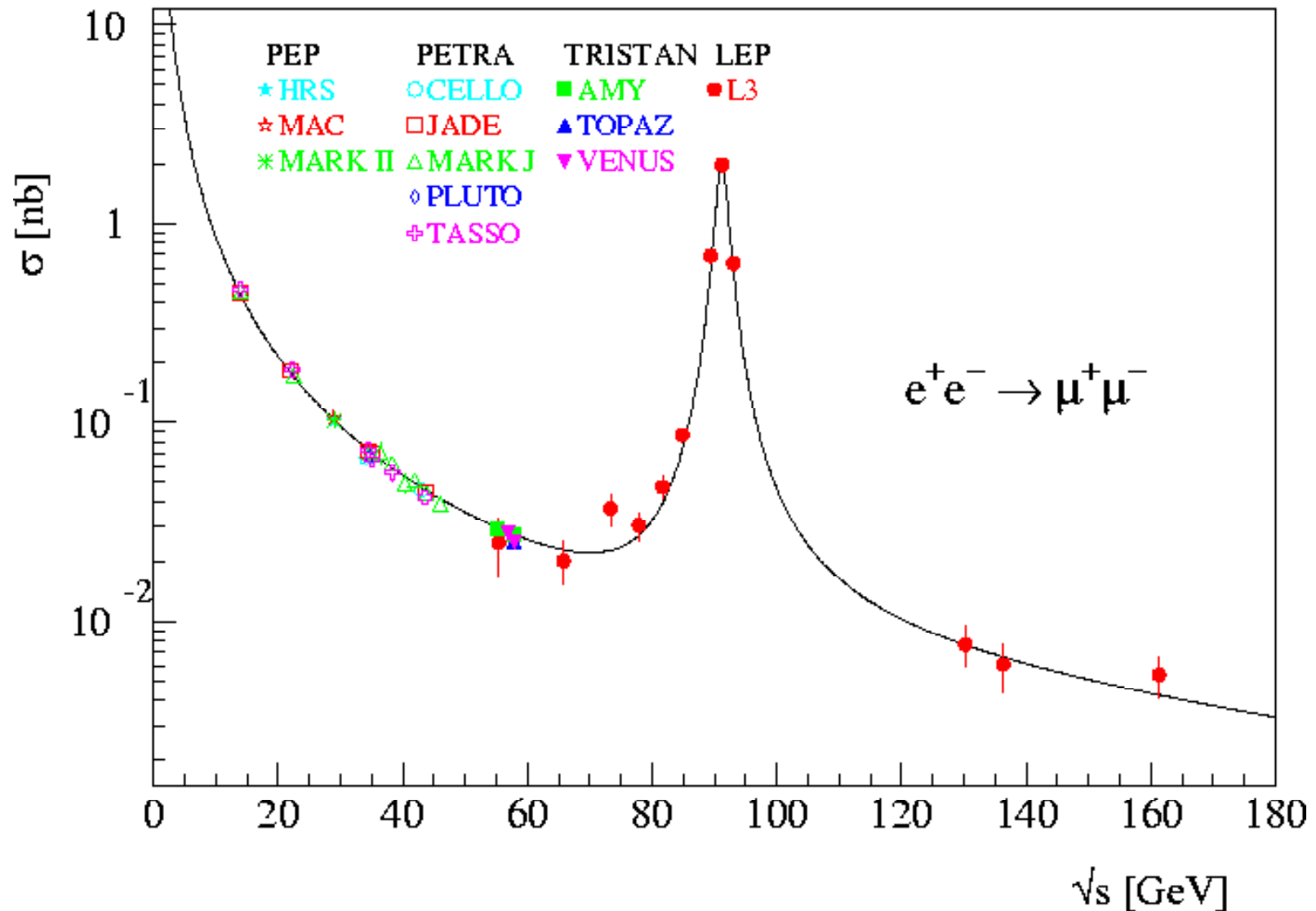
Rudolf LEU, PS Division, CERN, 02.09.96
Revised and adapted by Antonella Del Rosso, ITT Div.,
in collaboration with B. Desforges, SL Div., and
D. Manghji, PS Div. CERN, 23.05.01



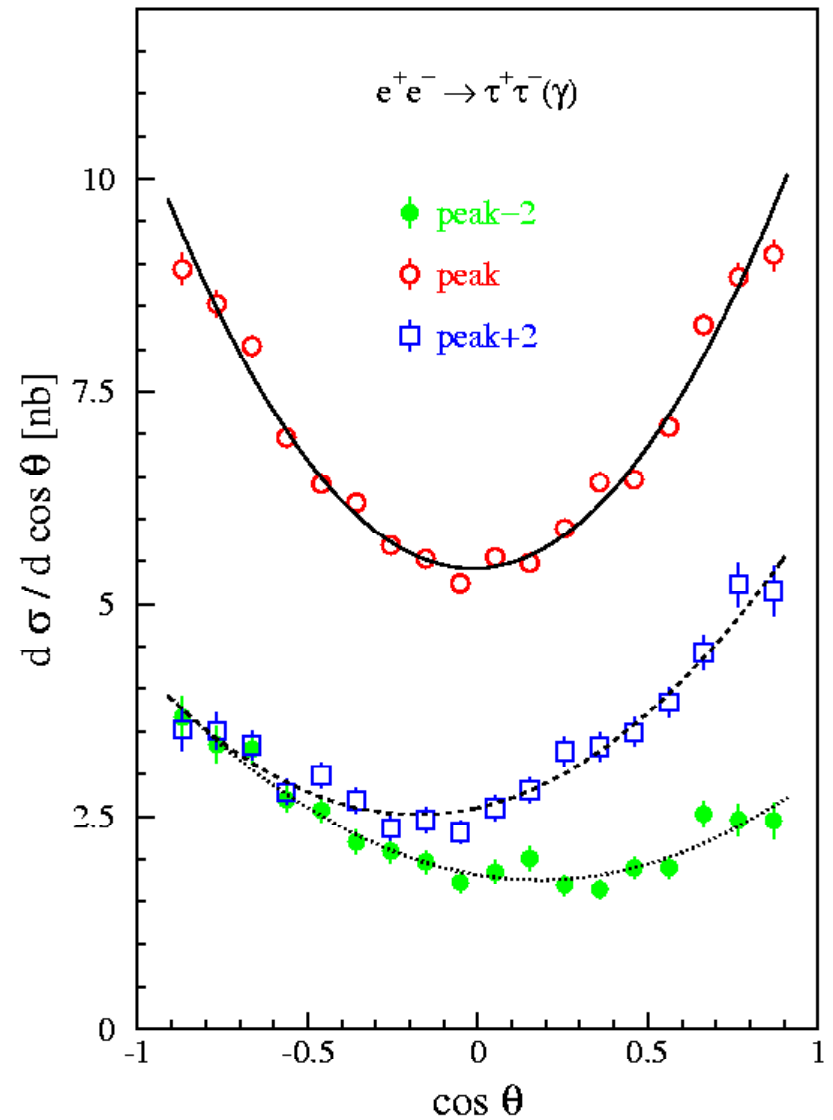
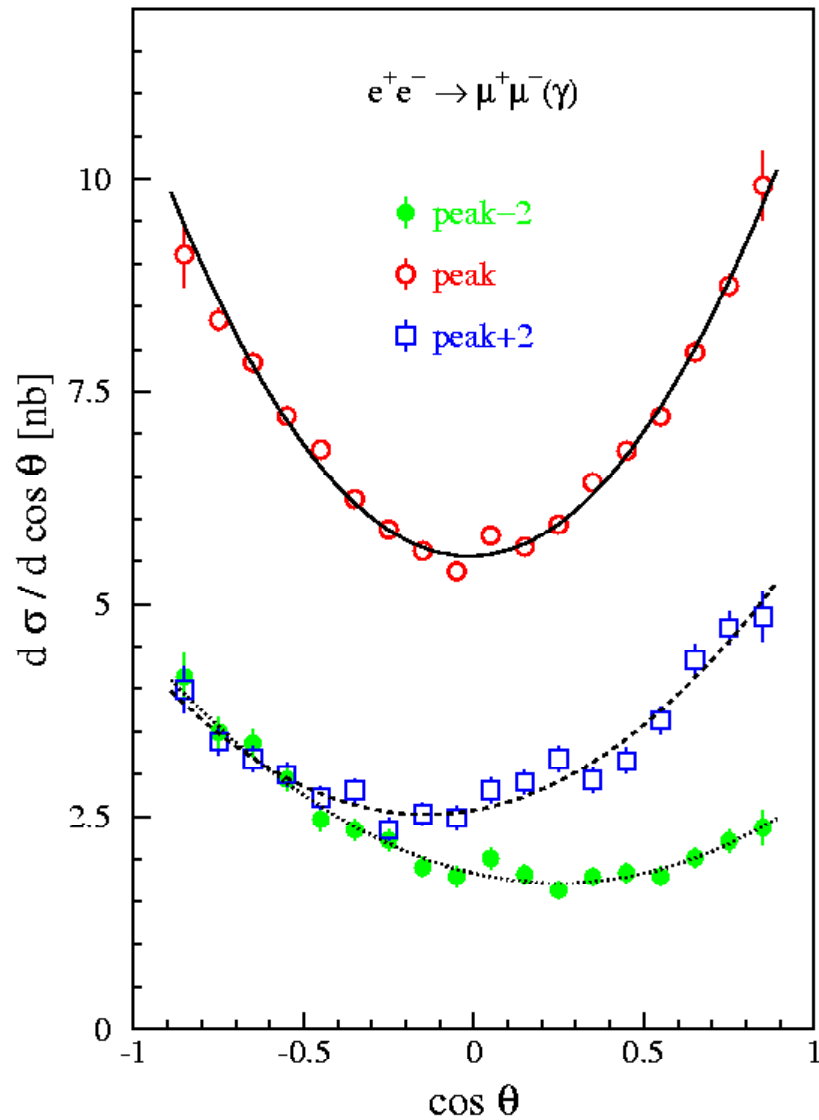
e^+e^- verstrooing

Drie generaties!

Werkzame doorsnede $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$



Hoekverdelingen: $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ en $\tau^-\tau^+$



En nu heb je ook $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ gedaan!

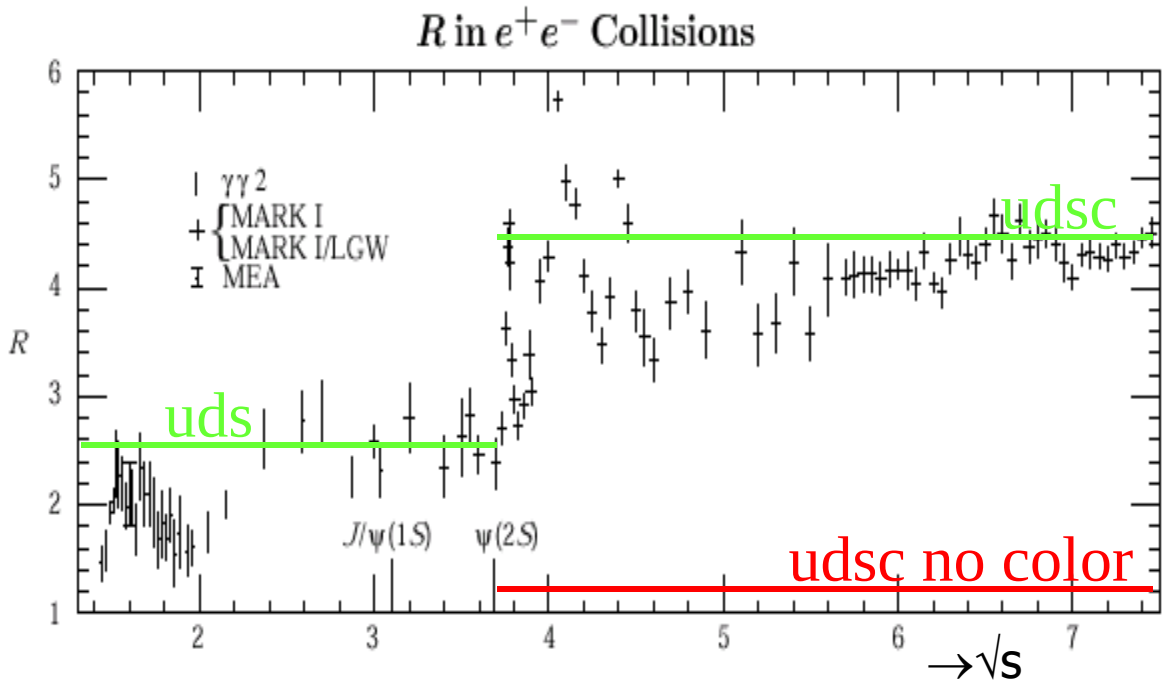
Met drie kleuren

$$\text{u, c, t} \quad |q| = \frac{2}{3}: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{9} \times \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi\alpha^2}{27s} \quad \sum_{\text{colour}} \frac{16\pi\alpha^2}{27s} \rightarrow \frac{16\pi\alpha^2}{9s}$$

$$\text{d, s, b} \quad |q| = \frac{1}{3}: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{9} \times \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{27s} \quad \sum_{\text{colour}} \frac{4\pi\alpha^2}{27s} \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{9s}$$

$$R \equiv \frac{\sigma_{qq}}{\sigma_{\mu\mu}} = \frac{\sum_{\text{quarks}} e^+e^- \rightarrow q\bar{q}}{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$$

$\sigma_{\mu\mu} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$



Delta functie van een functie

We zoeken een uitdrukking voor $\delta(f(x))$

Stel dat $f(x)$ een enkel nulpunt heeft voor $x = x_0$

Dan geldt
$$\int_{y_1}^{y_2} \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & y_1 < x_0 < y_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

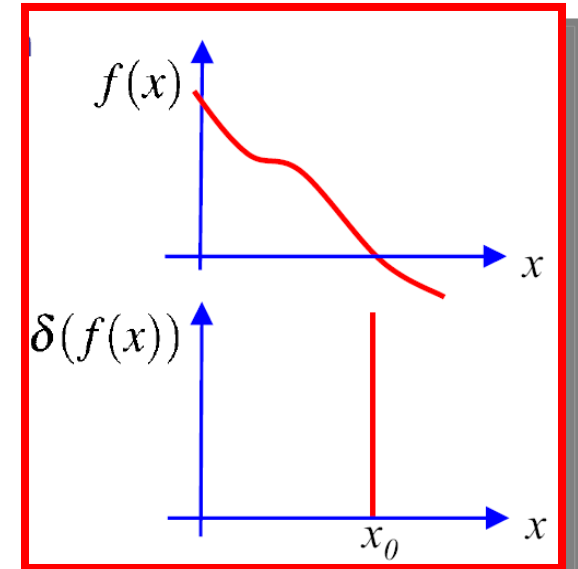
Schrijft $y = f(x)$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) \frac{df}{dx} dx = \begin{cases} 1 & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

Er geldt dan
$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \begin{cases} 1 & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

Omschrijven levert
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \frac{1}{\left| df/dx \right|_{x_0}} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(f(x)) = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0}^{-1} \delta(x - x_0)}$$



Voorbeeld: Delta functie van een functie

Meerdere nulpunten:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

Opgave: Vereenvoudig de uitdrukking $\delta(x^2 + x - 2)$

Oplossing: Er geldt $g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Nulpunten voor $x_1 = 1$ en $x_2 = -2$

Afgeleide $g'(x) = 2x + 1$

Dus $g'(x_1) = 3$ en $g'(x_2) = -3$


$$\delta(x^2 + x - 2) = \frac{1}{3}\delta(x - 1) + \frac{1}{3}\delta(x + 2)$$

Voorbeeld: Delta functie van een functie

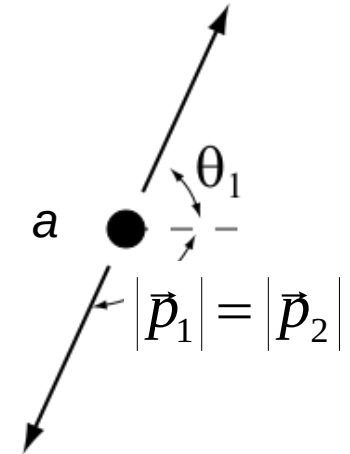
Deeltjesverval $a \rightarrow 1 + 2$ in CM systeem

Bereken $I = \int \delta(m_a - E_1 - E_2) d|\vec{p}_1|$

$$I = \int \delta(m_a - \underbrace{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_2^2}}_{\text{dit is je functie } f(x)} \underbrace{d|\vec{p}_1|}_{\text{dit } dx})$$

dit is je functie $f(x)$

dit dx



Er geldt
$$\frac{df}{d|\vec{p}_1|} = -\frac{|\vec{p}_1|}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2}} - \frac{|\vec{p}_1|}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_2^2}} = -\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} - \frac{|\vec{p}_1|}{E_2} = -|\vec{p}_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$$

Stel $|\vec{p}^*|$ is de waarde van de impuls waarvoor $f(|\vec{p}_1|) = 0$

Dan

$$I = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{|\vec{p}^*|}$$

Gouden regel van Fermi – revisited

Gouden regel van Fermi: niet-relativistisch

$$\text{transition rate} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{phase space})$$

Faseruimte is dichtheid van de eindtoestanden $\rho(E_f)$

We schrijven (met $E_i = E_f$)

$$\rho(E_f) = \left| \frac{dn}{dE} \right|_{E_f} = \int \frac{dn}{dE} \delta(E - E_i) dE$$

De gouden regel luidt nu

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \delta(E - E_i) dn$$

Integreer over alle mogelijke toestanden met elke energie, merk op dat

$$dn = \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Met impulsbehoud en $a \rightarrow 1 + 2$

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \underbrace{\delta(E_a - E_1 - E_2)}_{\text{energiebehoud}} \underbrace{\delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)}_{\text{impulsbehoud}} \underbrace{\frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}}_{\text{toestandsdichtheid}}$$

energiebehoud

impulsbehoud

toestandsdichtheid

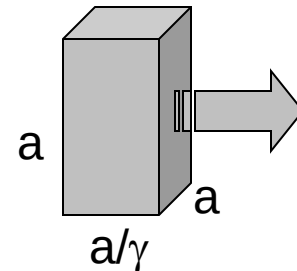
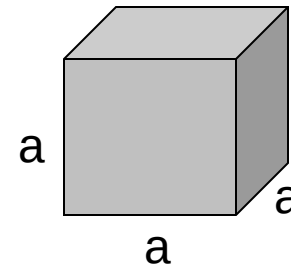
Lorentzinvariante faseruimte

In niet-relativistische QM normeren we op 1 deeltje / volume eenheid $\int \psi^* \psi dV = 1$

Relativistische contraheert volume met $\gamma = E / mc^2$

Deeltjesdichtheid neemt toe met

$$\gamma = E / mc^2$$



Conventie:

Normeer op $2E$ deeltjes / volume eenheid

$$\int \psi'^* \psi' dV = \frac{2E}{c} \hbar^3$$

Gebruik

$$\psi' = \sqrt{\frac{2E\hbar^3}{c}} \psi$$

Lorentzinvariant matrixelement

$$M_{fi}^{LI} = \left\langle \psi'_1 \cdot \psi'_2 \cdots | \hat{H} | \cdots \psi'_{n-1} \cdot \psi'_n \right\rangle = \left(\frac{2E_1 \hbar^3}{c} \frac{2E_2 \hbar^3}{c} \cdots \frac{2E_n \hbar^3}{c} \right)^{\frac{1}{2}} M_{fi}$$

Lorentzinvariante vervalsnelheid

Beschouw het verval $1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n$

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar E_1} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \dots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$$

Deeltje i heeft vierimpuls $p_i = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$

tijddilatatie

Energie E_i is een functie van $\mathbf{p}_i$ vanwege $E_i^2 - \mathbf{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$

We gaan er van uit dat deeltje 1 in rust is, dus $p_1 = (m_1 c, \mathbf{0})$

S is het product van statistische factoren: $1/j!$ voor elke groep van j identieke deeltjes in de eindtoestand

Formule geeft de differentiële vervalsnelheid, waarbij de impuls van deeltje 2 in het gebied $d^3 \mathbf{p}_2$ rond de waarde $\mathbf{p}_2$ ligt, etc. In het algemeen integreren we over de impulsen in de eindtoestand.

Bijvoorbeeld voor $1 \rightarrow 2 + 3$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3$$

Voorbeeld: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Bereken vervalsnelheid voor $1 \rightarrow 2 + 3$ met $m_1 = m_2 = 0$; amplitude $M(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$

Herschrijf delta functie $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta\left(mc - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c}\right) \delta^3(-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$

Er geldt $m_2 = m_3 = 0$ en dus $E_2 = |\mathbf{p}_2|c$, $E_3 = |\mathbf{p}_3|c$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3$$



$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|} \times \delta(mc - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_3|) \delta^3(-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_2|^2} \delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) d^3\mathbf{p}_2$$

Sferische coördinaten $d^3\mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi$

Hoekintegratie

$$\int \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

We vinden $\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) d|\mathbf{p}_2|$

Er geldt $\delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) = \frac{1}{2} \delta\left(|\mathbf{p}_2| - \frac{mc}{2}\right)$

$$\Gamma = \frac{S}{16\pi \hbar m} |\mathcal{M}|^2$$

$S = 1/2$ voor $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Tweedeeltjesverval

Bereken vervalsnelheid voor $1 \rightarrow 2 + 3$

Er geldt $E_2 = c\sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2}$, $E_3 = c\sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}$. Integreer over $\mathbf{p}_3$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3$$



$$\Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m_1} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2}} d^3 \mathbf{p}_2$$

Sferische coördinaten en hoekintegratie. Met $\rho = |\mathbf{p}_2|$ vinden we

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$

We moeten nu nog over de delta functie integreren

Dat kan in principe met

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

We doen het nu echter met een andere methode

Tweedeeltjesverval

We hebben
$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$

Verander van variabele
$$E \equiv c(\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} + \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})$$

$$\Rightarrow dE = \frac{E\rho}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} d\rho$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c^2}^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho}{E} \delta\left(m_1 c - \frac{E}{c}\right) dE$$

Er geldt $\delta(m_1 c - E/c) = c\delta(E - m_1 c^2) \Rightarrow \Gamma = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \rho_0}{8\pi\hbar m_1^2 c}$

Mits $m_1 > m_2 + m_3$, anders niet in het integratie interval!

Merk op dat ρ_0 de waarde van $\rho (= |\mathbf{p}_2|)$ is waarvoor $E = m_1 c^2$

Je vindt
$$\rho_0 = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}$$

Uiteindelijk

$$\Gamma = \frac{S|\mathbf{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\mathcal{M}|^2$$

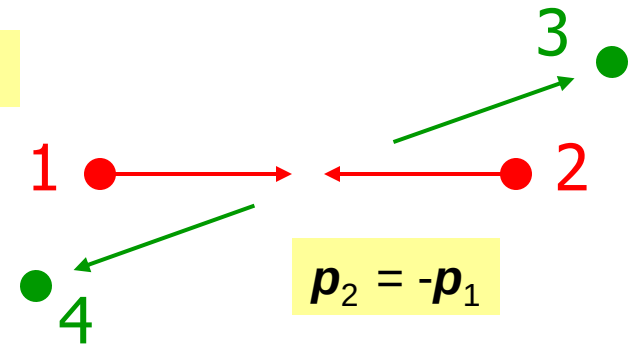
Bij meer dan 2 deeltjes moet je integreren over het matrixelement

Elastische verstrooiing in het CM systeem

Beschouw de botsing $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ in CM systeem

Dan geldt $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 / c^2 + \vec{p}_1^2$

➡ $\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = (E_1 + E_2) |\vec{p}_1| / c$



$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \cdots - p_n)$$

Dus
$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \frac{d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4}{E_3 E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

Herschrijf de delta functie

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta\left(\frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{c}\right) \underline{\delta^3(-\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)}$$

Integreer over impuls delta functie: $\vec{p}_4 \Rightarrow -\vec{p}_3$

Gebruik $E_i = c \sqrt{m_i^2 c^2 + \vec{p}_i^2}$

Elastische verstrooiing in het CM systeem

We vinden

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c) - \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}} d^3 \mathbf{p}_3$$

Het matrixelement hangt in principe van alle impulsen af. Echter $\vec{p}_2 \Rightarrow -\vec{p}_1$ en $\vec{p}_4 \Rightarrow -\vec{p}_3$, dus geldt $M(\vec{p}_1, \vec{p}_3)$. Omdat $\vec{p}_1$ vastligt, geldt $M(|\vec{p}_3|, \theta)$.

Gebruik

$$d^3 \mathbf{p}_3 = \rho^2 d\rho d\Omega$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

We vinden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c) - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$



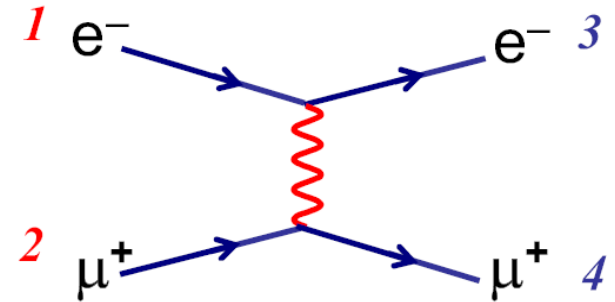
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}$$

Lorentzinvariante werkzame doorsnede

Voor elastische verstrooiing geldt $|\vec{p}_i^*| = |\vec{p}_f^*|$

Dan geldt $\sigma_{elastisch} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \int S |M_{fi}|^2 d\Omega^*$

Dit geldt ook in de limiet $E_i \gg m_i$

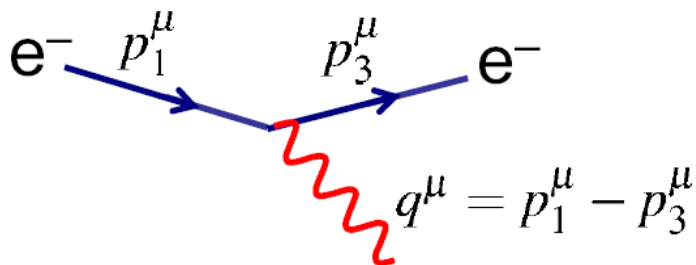


Merk op dat de differentiële werkzame doorsnede NIET Lorentzinvariant is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |M_{fi}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} S |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

De hoeken refereren naar het CM systeem! $d\Omega^* = d(\cos \theta^*) d\phi^*$

Voor een algemeen geldige vergelijking: druk $d\Omega$ uit in viervectoren



Vierimpuls overdracht

$$t = q^2 = (p_1 - p_3)^2$$

Faseruimte – Klassiek

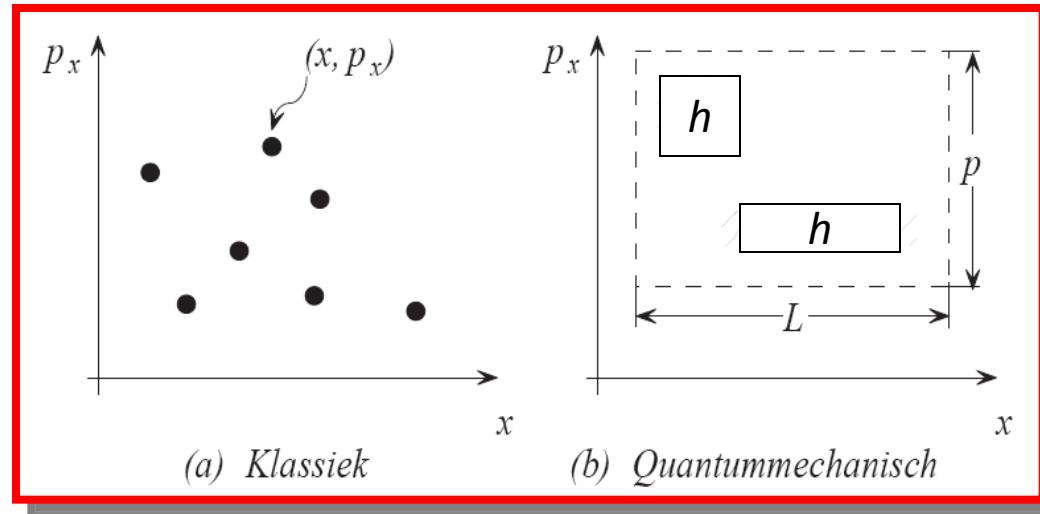
Faseruimte in 1D:

Klassiek neemt elke toestand
een punt met (x, p_x) in

In QM hebben we rekening te
houden met

Volume van elke toestand is h

Faseruimte met volume Lp bevat
 N cellen,



Celvolume in 3D is

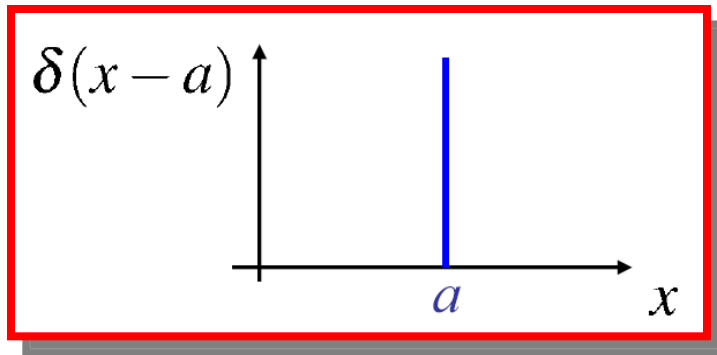
Aantal toestanden in volume is

Aantal toestanden per volume eenheid

Toestandsdichtheid

Delta functie van Dirac

In de berekeningen maken we veelvuldig gebruik van de Dirac δ functie: 'een oneindig smalle piek met integraal 1'



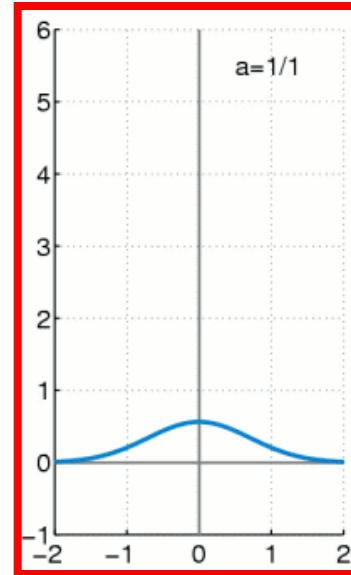
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Elke functie met bovenstaande eigenschappen kan $\delta(x)$ representeren, bijvoorbeeld $\lim_{a \rightarrow 0}$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

In relativistische quantummechanica zijn delta functies nuttig voor integralen over de faseruimte, bijvoorbeeld in het verval $a \rightarrow 1 + 2$. Ze drukken dan energie en impulsbehoud uit.



$$\int \delta(E_{\text{red}} - E_1 - E_2) \quad \int \delta^3(\vec{p}_{\text{red}} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

Gouden regel voor verstrooiing

Beschouw de botsing $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \cdots - p_n)$$

Formule geeft de differentiële werkzame doorsnede, waarbij de impuls van deeltje 3 in het gebied $d^3 \mathbf{p}_3$ rond de waarde $\mathbf{p}_3$ ligt, etc. In het algemeen integreren we over de impulsen in de eindtoestand en zijn we bijvoorbeeld geïnteresseerd in enkel de hoekverdeling van deeltje 3.

Uitdrukking volgt uit *Telsnelheid* $= n_1(v_1 + v_2) n_2 s \rightarrow s = \Gamma_{fi} / (v_1 + v_2)$

Vervolgens wordt de fluxfactor Lorentzinvariant geschreven

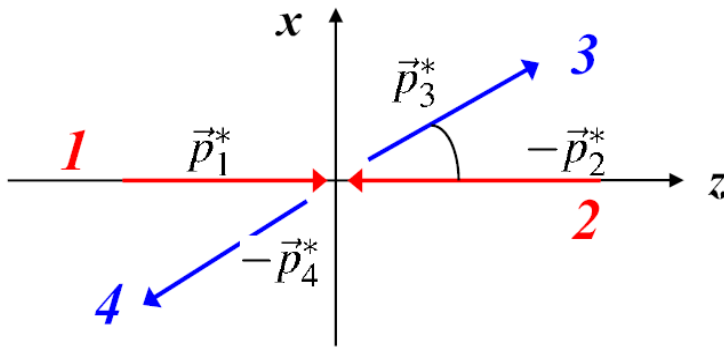
$$F = 2E_1 E_2 (v_1 + v_2) \quad \Rightarrow \quad F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}$$

In LAB

Lorentzinvariante werkzame doorsnede

Druk $d\Omega^*$ uit in termen van de Lorentzinvariant dt

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3$$



In CM frame:

$$p_1^{*\mu} = (E_1^*, 0, 0, |\vec{p}_1^*|)$$

$$p_3^{*\mu} = (E_3^*, |\vec{p}_3^*| \sin \theta^*, 0, |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*)$$

$$p_1^\mu p_{3\mu} = E_1^* E_3^* - |\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*$$

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1^* E_3^* + 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*$$

Dit geeft

$$dt = 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^* \implies d\Omega^* = d(\cos \theta^*) d\phi^* = \frac{dtd\phi^*}{2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*|}$$

en dus

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3^*|}{|\vec{p}_1^*|} S |M_{fi}|^2 d\Omega^* = \frac{\hbar^2 c^2}{2 \cdot 64\pi^2 s |\vec{p}_1^*|^2} S |M_{fi}|^2 d\phi^* dt$$

Integratie over $d\phi^*$ geeft

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi s |\vec{p}_1^*|^2} S |M_{fi}|^2$$

Lorentzinvariant

Fluxfactor voor $A + B \rightarrow \dots$

$$\text{Flux} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

c.m. stelsel:

$$P_1 = (E_1, \vec{p})$$

$$P_2 = (E_2, -\vec{p})$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E_1 E_2 + p^2 \\ \Rightarrow \text{Flux}^2 &= (E_1 E_2 + p^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \\ &= (E_1 E_2 + p^2)^2 - (E_1^2 - p^2)(E_2^2 - p^2) \\ &= 2E_1 E_2 p^2 + (E_1^2 + E_2^2)p^2 = (E_1 + E_2)^2 p^2 \\ \Rightarrow \text{Flux} &= (E_1 + E_2)p = pE_1 + pE_2 \\ &= |\vec{v}_1| E_1 E_2 + |\vec{v}_2| E_2 E_1 \\ &= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2 \end{aligned}$$

note: $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$

lab stelsel:

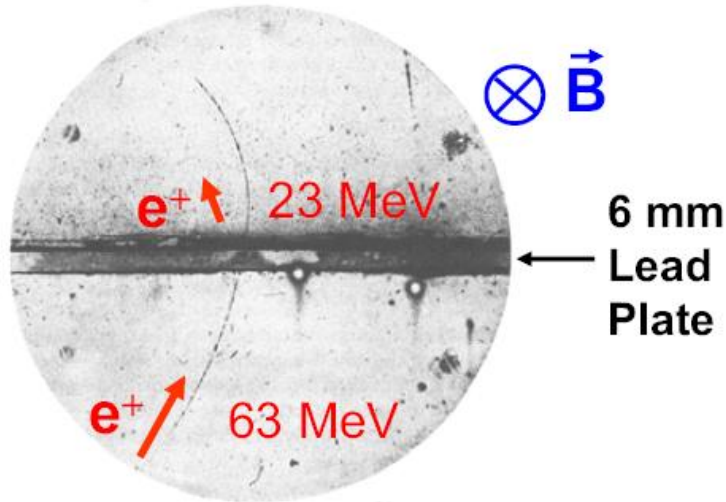
$$P_1 = (E, \vec{p})$$

$$P_2 = (m_2, 0)$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E m_2 \\ \Rightarrow \text{Flux}^2 &= (E m_2)^2 - m_1^2 m_2^2 - (E^2 - m_1^2) m_2^2 - p^2 m_2^2 \\ \Rightarrow \text{Flux} &= p m_2 - |\vec{v}| E m_2 \\ &\sim |\vec{v}| E E_2 \end{aligned}$$

Ontdekking van het positron

Kosmisch deeltje in een nevelkamer:

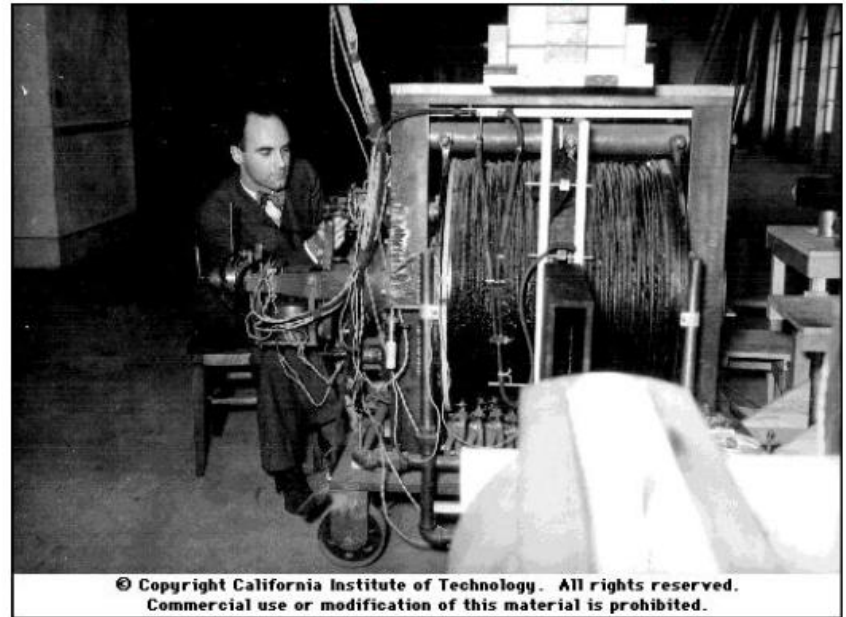


Elektron van boven vertraagt in de loden plaat (we weten dus de richting)

Kromming in B-veld geeft aan dat het een positief deeltje betreft.

Dit kan geen proton zijn, want protonen worden gestopt in het lood.

C.D.Anderson, Phys Rev 43 (1933) 491



Experimentele bevestiging van de voorspelling van antimaterie door de Dirac vergelijking. Antideeltjes oplossingen zijn een realiteit!