

Chapter 7

Het formalisme van Lagrange

7.1 Het Principe van Extreme Actie

De bewegingswetten van Newton zijn algemeen bekend. De bekendste is waarschijnlijk dat deeltjes zich in een rechte lijn en met constante snelheid voortbewegen zolang er geen krachten op werken. Dit wordt mathematisch uitgedrukt als

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0, \quad (7.1)$$

waar $\vec{x} = \vec{x}(t)$ de positie van het deeltje is, en m zijn massa. Indien er een kracht $\vec{F}$ op het deeltje werkt, komt deze aan de rechterzijde van deze vergelijking te staan. Deze formule is de basis van de Newtoniaanse mechanica en levert een stappenplan voor het oplossen van mechanische vraagstukken: vul de kracht in die op een deeltje werkt, los de resulterende vergelijking op, en de positie van het deeltje als functie van de tijd is dan bekend.

Deze Wet kan niet worden afgeleid; het is een experimenteel gegeven. Als wij deze willen uitbreiden naar een versie die geldt in de speciale relativiteitstheorie, is er net zo min een concrete afleiding beschikbaar. Wel kan er een uitbreiding geloofwaardig worden gemaakt door, wederom, gebruik te maken van de Minkowski-metrick en het Principe van Relativiteit. Het is dan vervolgens aan experiment om aan te tonen of de gevonden uitbreiding van Newtons Wet geldt of niet. Dit blijkt het geval te zijn. Voordat we deze afleiding geven, is het nuttig om een soortgelijke afleiding te geven voor de Wet van Newton; als deze behandeld is, is de relativistische uitbreiding nog maar een kleine stap. Het formalisme dat we hiervoor zullen gebruiken is dat van *Lagrange*.

Lagrange (1736-1813) ontwikkelde een nieuwe manier van mechanica doen, gebaseerd op een functie die nu zijn naam draagt: de *Lagrangiaan* L . Deze functie is gedefinieerd als het verschil tussen de kinetische energie K van een deeltje, en zijn potentiële energie V

$$L(x(t), v(t)) = K(x(t), v(t)) - V(x(t), v(t)), \quad (7.2)$$

en deze functie geïntegreerd over de tijdsduur van een fysisch proces noemt met de *actie* S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), v(t)) dt, \quad (7.3)$$

waarin t_1 het tijdstip van begin van het proces is, en t_2 het tijdstip van het eind van het proces. Zoals al gesuggereerd door onze notatie, heeft de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen geen constante waarde. Dit komt doordat de kinetische energie en de potentiële energie in het algemeen geen constante waarden hebben, omdat zij functies zijn van de positie en snelheid van het deeltje. Beschouw als voorbeeld een deeltje in het zwaartekrachtsveld van de aarde: de potentiële energie is laag wanneer dit deeltje dicht bij de aarde is, maar hoog wanneer het ver weg is; de kinetische energie neemt echter toe wanneer het deeltje onder invloed van die zwaartekracht steeds sneller naar de aarde valt. Dit voorbeeld laat zien dat de waarde van de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen afhankelijk is van de positie en snelheid van het deeltje. Deze zijn op hun beurt weer functies van de tijd, dus uiteindelijk is de Lagrangiaan een geheel tijdsafhankelijke functie. De actie S daarentegen is *wel* een constante, omdat we de Lagrangiaan integreren over de tijd (elke functie geïntegreerd over zijn variabele levert immers een constante op). De waarde van deze constante hangt daarmee, uiteraard, geheel af van het pad $x(t)$ dat het deeltje volgt tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2 . Welk pad dit is, is precies de vraag die wij beantwoord willen zien wanneer we mechanica doen. Als antwoord postuleert het formalisme van Lagrange dat *een deeltje altijd het pad volgt dat de waarde van de actie minimaal of maximaal maakt*. Dit noemt men het *Principe van Extreme Actie*, en levert een geheel nieuw voorschrift om mechanica te doen: schrijf de Lagrangiaan op van bewegend deeltje, integreer deze over de tijd, en zoek het pad dat deze integraal minimaal of maximaal maakt.

Deze manier van mechanica doen is soms te prefereren boven de meer gebruikelijke Wet van Newton¹. Hij is echter niet minder fundamenteel: het is zowel mogelijk het Principe van Extreme Actie af te leiden door uit te gaan van de Wet van Newton, als omgekeerd. Het Principe van Extreme Actie en de Wet van Newton zijn daarom geheel equivalent.

Als voorbeeld van een toepassing van het formalisme van Lagrange, zal de Wet van Newton worden afgeleid door uit te gaan van het Principe van Extreme Actie. We beschouwen een deeltje met massa m , dat beweegt onder invloed van een kracht F en daarom een potentiële energie V heeft gerelateerd aan de kracht via $\vec{F} \equiv -\nabla V$; de kinetische energie K van een deeltje wordt, zoals altijd, gegeven door $K = \frac{1}{2}mv^i v_i$ (waar $v^i \equiv \frac{dx^i(t)}{dt}$). De Lagrangiaan van dit deeltje wordt dan gegeven door

$$L = \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t)), \quad (7.4)$$

¹Enkele redenen zijn dat in het formalisme van Lagrange de belangrijkste functie een scalair is, waar in de Wet van Newton vectoren voorkomen. Ook is het zo dat bepaalde symmetrie-eigenschappen van fysische systemen zich vaak duidelijk openbaren in het Lagrange-formalisme. Het is om deze redenen dat in o.a. de quantum velden theorie vrijwel uitsluitend met Lagrangianen gewerkt wordt.

en de actie S is dan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m v^i(t) v_i(t) - V(x(t)) \right\} dt. \quad (7.5)$$

Volgens het Principe van Extreme Actie zal het deeltje een pad volgen dat de actie een extreme waarde geeft. Dit leidt tot het volgende wiskundige vraagstuk: gegeven een integraal over t met integrand $L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$, hoe kan men dan bepalen welke functie $\vec{x}(t)$ de uitkomst van deze integraal minimaal of maximaal maakt? Het antwoord wordt gegeven door de *vergelijkingen van Euler-Lagrange*: de componenten $x^i(t)$ het pad $\vec{x}(t)$ dat de integraal een extreme waarde geeft, voldoet aan

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right). \quad (7.6)$$

Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk, en gaat als volgt. Laten we aannemen dat $x(t)$ de x -component van het pad $\vec{x}(t)$ is dat de integraal een extreme waarde geeft. Per definitie van een extreme waarde zal elke kleine afwijking van dit pad, $\delta x \ll x$, de actie S een extra bijdrage geven, δS , die gelijk dient te zijn aan nul. We willen dus op zoek naar het pad $x(t)$ waarvoor geldt

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t))\} dt, \quad (7.7)$$

waarin

$$\delta S = 0. \quad (7.8)$$

Aangezien δx klein is, kunnen we de Lagrangiaan benaderen door een eerste orde Taylorreeks om $\delta x(t) = 0$ en $\delta v(t) = 0$,

$$L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t)) \approx L(x(t), v(t)) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v. \quad (7.9)$$

Wanneer we dit invullen in Eq.(7.5) vinden we de actie S terug plus een extra term, die we kunnen identificeren als δS :

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right\} dt. \quad (7.10)$$

Deze uitdrukking hoort gelijk te zijn aan nul. Nadat we een partiele integratie doen op de tweede term van de integrand, wordt gevonden:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} \delta x(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v} \delta x(t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (7.11)$$

De afwijking $\delta x(t)$ mag in principe elke mogelijke functie zijn, mits maar geldt dat zij nul is op het begin en eind van het proces. Er geldt dan ook $\delta x(t_1) = 0$ en $\delta x(t_2) = 0$, en hiermee volgt dat de laatste term in de laatste vergelijking gelijk is aan nul. De overgebleven

integraal zal in het algemeen gelijk kunnen zijn aan nul voor specifieke functies $\delta x(t)$; echter, de eis is dat deze integraal nul is voor *elke* mogelijke afwijking $\delta x(t)$ van het pad $x(t)$, en dit kan alleen wanneer alles tussen de gekrulde haken gelijk is aan nul. Deze eis levert dan precies Eq.(7.6), voor de x -component van het gezochte pad. Voor de twee andere plaatscoördinaten van dit pad, $y(t), z(t)$ kan deze afleiding ook gebruikt worden en geldt dezelfde uitkomst.

Wanneer de vergelijkingen van Euler-Lagrange toegepast wordt op de huidige Lagrangiaan, vinden we

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} = m \frac{dv^i}{dt}. \quad (7.12)$$

Linkerkant van deze vergelijkingen herkennen we als de kracht F^i in de i -richting, terwijl de rechterkant precies gelijk is aan $m \frac{d^2 x^i}{dt^2}$. We kunnen deze drie uitkomsten samen nemen in een enkele vectorvergelijking,

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}, \quad (7.13)$$

wat precies de wet van Newton is. Zoals aangekondigd volgt deze inderdaad uit het Principe van Extreme Actie.

Het Lagrangiaanse formalisme kan ook gebruikt worden om de impuls en energie van een deeltje te bepalen. De impuls volgt uit de Lagrangiaan als

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad (7.14)$$

wat voor de huidige Lagrangiaan de gebruikelijke uitdrukking voor de impuls van een deeltje oplevert

$$\vec{p} = m\vec{v}; \quad (7.15)$$

en de energie van een deeltje volgt via de vergelijking

$$E = \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) v - L, \quad (7.16)$$

wat voor de huidige Lagrangiaan de gebruikelijke uitdrukking voor de energie oplevert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) v - L &= (mv) v - \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x) \right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + V(x). \end{aligned} \quad (7.17)$$

7.2 Lagrangiaanse Speciale Relativiteitstheorie

Na deze inleiding in het formalisme van Lagrange, kan teruggekeerd worden naar de speciale relativiteitstheorie, en gepoogd worden de mechanica van Newton uit te breiden naar een versie die overeenkomt met het Principe van Relativiteit. De Lagrangiaanse methode leent zich hier uitstekend voor. Allereerst zullen we een vrij deeltje beschouwen, oftewel

een deeltje met massa m dat beweegt zonder beïnvloed te worden door een kracht. De Lagrangiaan voor zo'n deeltje bestaat dan alleen uit een kinetische term,

$$L = K. \quad (7.18)$$

In de pre-relativistische mechanica wordt de kinetische energie gegeven door $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Deze uitdrukking kunnen we echter niet overnemen naar de Relativiteitstheorie. Immers, het Principe van Relativiteit eist dat de natuurwetten zodanig geformuleerd moeten zijn dat zij niet van vorm veranderen wanneer naar een ander inertiaalstelsel wordt getransformeerd. Dit betekent dat de gezochte Lagrangiaan invariant moet zijn onder transformaties tussen inertiaalstelsels, en daar voldoet bovenstaande uitdrukking zeker niet aan. Echter, met enige aanpassing is het eenvoudig een vorm te vinden die erg lijkt op de oude uitdrukking, maar wel degelijk invariant is. Hiervoor schrijven we eerst de oude uitdrukking uit als

$$L = K = \frac{1}{2}m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}, \quad (7.19)$$

waar de Einstein sommatieconventie gebruikt is: $dx^i dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Wat de invariantie van deze uitdrukking in de weg staat zijn twee dingen: allereerst zijn de dx 's inertiaalstelsel-afhankelijk; ten tweede zijn de dt 's dat eveneens. We hadden immers al gezien dat waarnemers in verschillende inertiaalsystemen, verschillende afstanden en tijdsduren meten. Deze uitdrukking kan daarom nooit voldoen aan het Principe van Relativiteit. Echter, wanneer we $dx^i dx_i$ vervangen door $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ staat in de teller nu precies het lijnelement ds^2 , waarvan bekend is dat dit invariant is. Op dezelfde manier ligt een uitbreiding van de twee dt 's ook voor de hand: vervang $dt dt$ door $d\tau^2$, zodat ook dit nu invariant is geworden. Een natuurlijke suggestie voor een relativistische Lagrangiaan voor een vrij deeltje is dan

$$L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (7.20)$$

Deze overwegingen zijn natuurlijk geen *bewijs* voor de geldigheid van deze uitdrukking: het is een gok. Er zijn ook andere Lagrangianen denkbaar die voldoen aan het Principe van Relativiteit. Echter, deze uitdrukking is de meest simpele, en bovendien zal blijken dat de bewegingswetten die hieruit volgen, reduceren tot de oude vertrouwde bewegingswetten van Newton wanneer ze toegepast worden in situaties waarbij snelheden veel lager zijn dan de lichtsnelheid. Uiteindelijk zal het echter aan experiment zijn om aan te tonen of de gevonden wetmatigheden waar zijn. Tot nu toe wijzen alle experimenten uit dat dit inderdaad het geval is.

De actie S behorend bij deze Lagrangiaan wordt verkregen door de Lagrangiaan te integreren over de tijd. Ook hier moet het Principe van Relativiteit in acht worden genomen: de uitdrukking moet worden geïntegreerd over de eigentijd $d\tau$ (in tegenstelling tot over de waarnemer-afhankelijke tijd t) om zo de invariantie van de actie te waarborgen. De actie wordt dan dus

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau. \quad (7.21)$$

Om de bewegingswet voor het deeltje af te leiden, dient het Principe van Extreme Actie weer te worden toegepast: er moet gezocht worden naar het pad $x^\mu(\tau)$ dat de waarde van deze integraal minimaal of maximaal maakt. De Euler-Lagrange vergelijkingen voor deze situatie hebben de vorm²

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} \right). \quad (7.22)$$

Merk op dat dit vier vergelijkingen zijn: voor elk van de vier coördinaten van het pad $x^\mu(t)$ is er een vergelijking die moet worden opgelost. Wanneer de relativistische Lagrangiaan wordt ingevuld en beide zijden van de Euler-Lagrange vergelijkingen worden uitgerekend, wordt gevonden dat een vrij relativistisch deeltje een pad $x^\mu(\tau)$ volgt waarvan de componenten voldoen aan de vergelijkingen

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (7.23)$$

Dit lijkt sprekend op de wet van Newton voor een vrij deeltje, met twee subtiële verschillen. Ten eerste doet de wet van Newton uitspraken over de drie plaatscoördinaten van het deeltje, waar deze nieuwe uitdrukking ook uitspraak doet over de tijd. Deze laatste stelt dat

$$m \frac{dt^2}{d\tau^2} = 0, \quad (7.24)$$

waaruit volgt dat $\frac{dt}{d\tau}$ gelijk is aan een constante. Dat is niet verrassend: we hadden immers al gezien dat de tijd τ zoals gemeten door een waarnemer die het deeltje stil ziet staan, een andere is dan de tijd t gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet bewegen. Dit was precies het tijd-dilatatie effect, en de waarde van deze constante laat zich dan ook aflezen als de Lorentz-factor γ .

Het tweede verschil met de wet van Newton is het feit dat er hier afgeleiden worden genomen naar de eigentijd τ , waar in Newtons theorie afgeleiden werden genomen naar de tijd t . Dit maakt van deze nieuwe afgeleide een soort 'bastaard-object': de gemeten afstanden x worden genomen zoals gemeten door een willekeurige waarnemer ten opzichte van wie het deeltje beweegt, waar de tijd gemeten wordt door de waarnemer die stilstaat ten opzichte van het bewegende deeltje. Dit object wordt de *4-snelheid* $u^\mu(t)$ genoemd; de eigenschappen ervan zullen we later bestuderen. De 4-snelheid kunnen we omschrijven naar een meer natuurlijker object (te weten: afstand en tijd gemeten door een en dezelfde waarnemer). Dit kunnen we doen door ons te beseffen dat de verlopen tijd gemeten door het deeltje, en die door een andere waarnemer, met elkaar gerelateerd zijn via de formule van tijd-dilatatie: $d\tau = \gamma^{-1} dt$. Op deze manier is de gevonden wet uit te drukken als

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0. \quad (7.25)$$

²Dit is een generalisatie van Eq.X. Het bewijs van deze stelling is niet veel moeilijker dan dat van Eq.X, maar wordt voor het moment overgeslagen.

De wet van Newton kan nu gezien worden als een speciaal geval van deze nieuwe wet. Als we aannemen dat het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht ten opzichte van de waarnemer in wiens tijdsduur en afstand we nu alles hebben uitgedrukt (oftewel we nemen aan dat $v \ll c$), dan kan Eq.() benaderd worden door

$$\begin{aligned} m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} &\equiv \frac{m}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \\ &\approx m \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \\ &\approx m \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0, \end{aligned} \quad (7.26)$$

waar gebruik is gemaakt van de wiskundige regel $(1+x)^m \approx 1+mx$, welke geldt als $x \ll 1$. Dit is precies de wet van Newton! Zo is nu aangetoond dat de wet van Newton slechts een speciaal geval is van een meer algemene bewegingswet, Eq.(7.2)! Dit geeft ons vertrouwen dat onze keuze voor de Lagrangiaan waarschijnlijk de juiste was: hij voldoet aan het Principe van Relativiteit, en geeft ons bovendien onze oude vertrouwde bewegingswetten terug.

Met dit vertrouwen in het achterhoofd kunnen we nu verder gaan met het afleiden van wetten betreffende de energie en impuls. Zoals besproken in de vorige sectie, volgt een impuls uit een gegeven Lagrangiaan via de regel Eq.(7.15). Toegepast op de relativistische Lagrangiaan levert dit op voor de impuls van het vrije deeltje

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{d\tau}} = m \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\alpha\nu}, \quad (7.27)$$

en na beide kanten te contraheren met de inverse $\eta^{\mu\alpha}$ van de Minkowski-metriek wordt dit

$$\begin{aligned} p^\mu &= m \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= mu^\mu. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Wederom lijkt dit erg op de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton: een massa vermenigvuldigd met een snelheid. Echter, de snelheid is hier nu de 4-snelheid, en deze nieuwe impuls wordt dan ook de *4-impuls* genoemd. Vergeleken met de uitdrukking voor de Newtoniaanse variant, $p = m \left(\frac{dx}{dt}\right)$, gaan weer twee verschillen op: ten eerste is er een nul-component aanwezig, en ten tweede is het weer een 'bastaard-object': afgelegde afstand gemeten door een willekeurige waarnemer, en tijdsduur gemeten door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van het deeltje. Het tweede verschil kunnen we weer een plaats geven door de relatie tussen eigentijd en tijd te gebruiken. Dit levert

$$p^\alpha = m\gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (7.29)$$

en via dezelfde benaderingsmethode als eerder volgt direct dat de *i*-component hiervan reduceert tot de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton, wanneer het deeltje

maar veel langzamer beweegt dan het licht. De i -componenten van dit object worden daarom opgevat als de relativistische uitdrukkingen van de impuls. Wat de nul-component betreft, deze moet nog een interpretatie krijgen. Deze component is

$$p^0 = \gamma mc. \quad (7.30)$$

Via een dimensie-analyse is meteen te zien dat het de dimensie van een energie gedeeld door een snelheid heeft, en dit wekt de suggestie dat $p^0 c$ opgevat kan worden als de energie van het vrije deeltje. De vraag dringt zich dan al snel op: op welke manier is deze uitdrukking gerelateerd aan de Newtoniaanse uitdrukking voor de energie van een vrij deeltje, $K = \frac{1}{2}mv^2$? Ook hier biedt de benadering van lage snelheden uitkomst. Er geldt:

$$\begin{aligned} p^0 c &= mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &\approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \\ &= mc^2 + K, \end{aligned} \quad (7.31)$$

waar de uitdrukking voor de Newtoniaanse energie K van een vrij deeltje is ingevuld. Hier is nu gevolgd dat, in de benadering van lage snelheden, de nul-component maal c van de relativistische impuls reduceert tot de Newtoniaanse energie plus een extra term. Afgezien van deze constante term, is de nul-component maal c bij lage snelheden inderdaad gelijk aan de energie van het deeltje zoals voorspeld door de Newtoniaanse mechanica. Het ligt dan ook voor de hand om aan te nemen dat we $p^0 c$ ook bij hoge snelheden mogen opvatten als de energie van het deeltje. Wat de constante term betreft kan de vraag worden gesteld hoe fysisch interessant deze is. Immers, in de natuurkunde kennen alleen *energieverschillen* een meetbare betekenis³, en dus zal elke extra constante term toegevoegd aan de energie van een systeem uit de berekening vallen wanneer een energieverschil opgeschreven wordt. Toch heeft de constante term m hier wel degelijk een fysische betekenis: het is namelijk niet zomaar een willekeurige constante, het is een constante die een eigenschap van het deeltje bevat (de massa)! Deze energie is ook aanwezig wanneer het deeltje geen bewegingsenergie heeft voor een gegeven waarnemer, $K = 0$; we spreken dan ook over *rust-energie*, en deze is gelijk aan

$$E = mc^2. \quad (7.32)$$

Dit is wellicht de meest bekende formule uit de natuurkunde. Hij zegt dat elke massa een energie met zich meedraagt gelijk aan deze massa maal c^2 , en dat dit energie is die zich niet laat wegtransformeren door naar een ander inertiaalstelsel te gaan. Het is daarom een fundamentele hoeveelheid energie voor een gegeven massa m : voor *alle* waarnemers geldt dat een massa op zijn minst deze hoeveelheid energie met zich meedraagt.

³Denk bijvoorbeeld aan de relatie tussen een kracht F in x -richting en de potentiële energie V : $F = -\frac{dV}{dx}$, oftewel een meetbare grootte is uitgedrukt als een verschil in energie.

7.3 De Euler-Lagrange vergelijkingen voor velden

In de vorige secties hebben we gezien dat het formalisme van Lagrange gebruikt kan worden om een wiskundig nieuwe, maar verder volstrekt equivalente, manier te vinden om de beweging van puntdeeltjes te berekenen: zowel de bewegingswetten van Newton bleken in de Lagrangiaan opgesloten te liggen als de uitdrukkingen voor de impuls en de energie, en ook wisten we de speciale relativiteitstheorie te herschrijven in het formalisme van Lagrange. Willen we het formalisme van Lagrange gebruiken om *velden* te beschrijven, dan voldoet bovenstaande formulering nog niet helemaal. Immers, velden zijn geen puntdeeltjes, en kunnen daarom niet worden beschreven door *gelokaliseerde* grootheden: massa, positie, en snelheid hebben geen duidelijke betekenis meer voor velden. Dit was, uiteraard, een van de redenen waarom we over zijn gestapt op velden toen we quantummechanische processen, waarin posities en snelheden niet eenduidig gedefinieerd zijn, gingen beschrijven. De vraag is nu hoe we het formalisme van Lagrange moeten aanpassen zodanig dat het geschikt is om de mechanica van velden te bestuderen.

Hiertoe moeten twee aanpassingen worden gemaakt. Ten eerste is het duidelijk dat we niet zondermeer de Lagrangiaan Eq.(7.2) kunnen gebruiken. Hoewel die geheel algemeen is voor de beschrijving van puntdeeltjes (louter de vorm van de potentiële energie $V(x)$ dient te worden aangepast aan de gegeven situatie waarin het puntdeeltje zich bevindt), is elke Lagrangiaan die refereert naar vaste locaties $x(t)$ en snelheden $v(t)$ niet geschikt om quantummechanische processen te beschrijven. In plaats daarvan zal, voor elk type veld, een andere Lagrangiaan moeten worden geïntroduceerd; we zullen later op dit punt terugkomen.

De tweede aanpassing die moet worden gemaakt, zit hem in de betekenis van het Principe van Extreme Actie. In het geval van puntdeeltjes was de opdracht het pad $x(t)$ te vinden waarlangs de deeltjes bewegen, oftewel de functie $x(t)$ die als eigenschap heeft dat de actie een extreme waarde heeft. Aangezien in quantummechanische processen zulke scherp gedefinieerde deeltjespaden niet bestaan en, in plaats daarvan, alle informatie verstopt zit in een veld Φ , is de vraag deze keer: wat is het functie $\Phi(t, x)$ waarlangs *het veld* zich beweegt, zodanig dat de actie S een extreme waarde heeft? De Euler-Lagrange vergelijkingen Eq.(??) kunnen deze vraag niet beantwoorden, en zullen dus moeten worden aangepast. Dit zullen we nu doen.

Beschouw hiertoe een Lagrangiaan L . Aangezien we op zoek zijn naar de beschrijving van een veld Φ , zullen we aannemen dat de Lagrangiaan afhangt van het veld en zijn afgeleides naar de tijd- en ruimtecoördinaten. We schrijven dan ook: $L(\Phi, \partial_\mu \Phi)$. Naïefelijk gedacht zou de actie S behorend bij deze Lagrangiaan de volgende zijn

$$S \equiv \int L(\Phi, \partial_\mu \Phi) dt. \quad (7.33)$$

Deze vorm van de actie voldoet echter niet: de integratievariabele in de definitie van een actie moet de variabele zijn waarlangs het pad geparametriseerd wordt (zie boven: de integratievariabele was daar de tijd t , en als gevolg gaven de Euler-Lagrangevergelijkingen het pad als functie van t). Aangezien we hier geïnteresseerd zijn hoe het veld beweegt in

zowel de *ruimte* als de tijd, ligt het voor de hand om de actie te definiëren als een integraal over alle vier de ruimtetijdcoördinaten:

$$S \equiv \int \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x. \quad (7.34)$$

Het is in zulke vierdimensionale integralen gebruikelijk⁴ om het symbool L te vervangen door $\mathcal{L}$.

Vervolgens introduceren we een kleine afwijking $\delta\Phi$ van het veld en een kleine afwijking $\delta(\partial_\mu \Phi)$ van zijn afgeleide naar de tijdruimtecoördinaten. Per definitie van een extreme waarde geldt dat deze afwijkingen een afwijking δS van de actie introduceren die gelijk moet zijn aan nul. We zijn dus op zoek naar het pad Φ waarvoor geldt

$$S + \delta S = \int \{ \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu \Phi + \partial_\mu(\delta\Phi)) \} d^4x, \quad (7.35)$$

waarin

$$\delta S = 0. \quad (7.36)$$

Aangezien $\delta\Phi$ en $\delta(\partial_\mu \Phi)$ klein zijn, kunnen we de Lagrangiaan benaderen door een eerste orde Taylorreeks om $\delta\Phi = 0$ en $\delta(\partial\Phi) = 0$,

$$\mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu \Phi + \partial_\mu(\delta\Phi)) \approx \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) \quad (7.37)$$

Wanneer we dit invullen in Eq.(7.35) vinden we de actie S van Eq.(7.34) terug plus een extra term, die we kunnen identificeren als δS :

$$\delta S \equiv \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) \right\} d^4x. \quad (7.38)$$

Deze uitdrukking hoort gelijk te zijn aan nul wil de actie een extreme waarde hebben, en deze eis zal ons leiden naar de juiste Euler-Lagrange vergelijking. Hiertoe schrijven we in de tweede term van de integrand $\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi)$ en gebruiken daarna de produktregel van het differentieren, zodat de tweede term wordt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu(\delta\Phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta\Phi \quad (7.39)$$

Door deze stap gedaan te hebben kunnen we een heel stuk van de integrand van Eq.(7.38) schrijven als $\delta\Phi$ maal een functie, en het overgebleven stuk binnen een afgeleide ∂_μ :

$$\delta S = \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right) \delta\Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi \right) \right\} d^4x. \quad (7.40)$$

⁴Dit is omdat de eenheid van de integrand een andere is dan in de actie zoals gedefinieerd in Eq.(??). Een dimensieanalyse laat zien dat als L een Lagrangiaan is, $\mathcal{L}$ een Lagrangiaan-per-volume-eenheid is. Men noemt $\mathcal{L}$ daarom ook wel de *Lagrangiaan-dichtheid*. In de praktijk is men echter wat slordiger in het taalgebruik: beide symbolen worden aangeduid met de naam 'Lagrangiaan', en het moet maar uit de context blijken of het L of $\mathcal{L}$ betreft.

Dat tweede stuk is simpelweg de divergentie van een vectorfunctie: als we voor het gemak de uitdrukking binnen de afgeleide ∂_μ schrijven als F^μ , staat er immers:

$$\int \partial_\mu(F^\mu) d^4x, \quad (7.41)$$

oftewel de volume-integraal over de divergentie van een vectorfunctie F^μ . Volgens de Integraalstelling van Gauss is dit gelijk aan de functie F^μ geïntegreerd over het omsluitende oppervlak van het volume. In het huidige geval is de uitkomst van deze integraal nul, aangezien F^μ evenredig is met $\delta\Phi$ en we hadden aangenomen dat de afwijking nul is op het oppervlak van het volume. Van Eq.(7.38) blijft daarom over:

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right\} \delta\Phi d^4x. \quad (7.42)$$

De overgebleven integraal zou gelijk kunnen zijn aan nul voor een slimme specifieke keuze voor de functie $\delta\Phi$; echter, de eis is dat deze integraal nul is voor *elke* mogelijke afwijking $\delta\Phi$, en dit kan alleen wanneer alles tussen de gekrulde haken gelijk is aan nul. Oftewel, er is nu gevonden dat de actie S een extreme waarde heeft mits het veld Φ voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right). \quad (7.43)$$

Dit is de Euler-Lagrangevergelijking voor velden. De mechanica van velden komt dan ook neer op het volgende voorschrift: schrijf de Lagrangiaan $\mathcal{L}$ op van het veld, integreer deze over de ruimtetijd, en gebruik de Euler-Lagrangevergelijking om de functie Φ te vinden die deze integraal minimaal of maximaal maakt. Het Principe van Extreme Actie zegt dan dit de manier is waarop het veld Φ beweegt.

7.4 De Klein-Gordon vergelijking en de Dirac vergelijking

Nu de regels voor het beschrijven van velden bekend zijn, kunnen we onze eerdere inzichten over het Klein-Gordon veld en het Dirac veld in dit nieuwe formalisme uitdrukken. Hiertoe introduceren we de volgende Lagrangianen: voor het Klein-Gordon veld ϕ :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 |\phi|^2, \quad (7.44)$$

en voor het Dirac-veld ψ :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (7.45)$$

Dat deze Lagrangianen inderdaad de bekende bewegingsvergelijkingen voor quantumvelden opleveren zullen we nu demonstreren, beginnend met de Klein-Gordon Lagrangiaan. Hiertoe vullen we de Lagrangiaan Eq.(7.44) in de Euler-Lagrange vergelijking in, en werken

we beide zijden uit. Het is direct duidelijk dat de afgeleides van de rechterzijde alleen zal werken op de eerste term van de Klein-Gordon Lagrangiaan. De rechterzijde van de Euler-Lagrangevergelijking geeft de uitdrukking:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu \phi^*} (\eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi^*) (\partial_\beta \phi)) &= \partial_\mu (\eta^{\mu\beta} \partial_\beta \phi) = \eta^{\mu\beta} \partial_\mu \partial_\beta \phi \\ &= \square^2 \phi. \end{aligned} \quad (7.46)$$

De linkerzijde van de Euler-Lagrange vergelijking werkt alleen op de tweede term van de Klein-Gordon Lagrangiaan, en geeft

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = -m^2 \phi. \quad (7.47)$$

De beide zijdes aan elkaar gelijkgesteld geeft ons dan inderdaad de Klein-Gordon vergelijking:

$$(\square^2 + m^2) \phi = 0. \quad (7.48)$$

Op een soortgelijke manier kunnen we aantonen dat de Lagrangiaan van Eq.(7.45) inderdaad leidt tot de Dirac-vergelijking. Deze keer hebben we echter twee keuzes: naar welk van de twee velden ψ en $\bar{\psi}$ zullen we de afgeleides nemen? Als we de afgeleides nemen naar $\bar{\psi}$ is de rechterzijde van de Euler-Lagrange vergelijking gelijk aan nul, en de linkerzijde geeft:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} (i\psi \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi) = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi, \quad (7.49)$$

en dus geeft de Euler-Lagrange vergelijking inderdaad de gebruikelijke Dirac vergelijking terug:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (7.50)$$

(het is interessant om op te merken dat als we de gevonden bewegingsvergelijking terug substitueren in de Lagrangiaan, we vinden dat die gelijk is aan nul. Dit geldt dan ook voor de actie S . De extreme waarde van de actie is blijkbaar nul.)

Als we daarentegen afgeleides zouden hebben genomen naar het veld ψ , zou de linkerzijde van de Euler-Lagrangevergelijking gelijk zijn aan $-m\bar{\psi}$, en de linkerzijde zou opleveren

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi)} (i\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi) \right) = \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu). \quad (7.51)$$

Samengenomen vinden we dan dat de Euler-Lagrangevergelijking de Dirac vergelijking geeft voor de adjoint spinor $\bar{\psi}$:

$$i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (7.52)$$

De Lagrangiaan Eq.(7.45) is dus het voorschrift waarmee via de Euler-Lagrange vergelijking niet alleen de Dirac-vergelijking voor het spinorveld ψ kan worden gevonden, maar ook die voor de adjoint spinor $\bar{\psi}$.

Dit is niet ongebruikelijk voor Lagrangianen: vaak levert *een enkele* Lagrangiaan de bewegingsvergelijkingen op voor *meerdere* velden. In bovenstaand voorbeeld levert dit nog niet zo veel winst op; immers, wanneer de Dirac spinor ψ is gevonden, is het eenvoudig om de adjoint spinor $\bar{\psi}$ te construeren zonder daarvoor de differentiaalvergelijking diens te hoeven oplossen. Echter, we zullen snel voorbeelden tegenkomen waarin we fundamenteel verschillende velden zullen kunnen beschrijven met een enkele Lagrangiaan. Uiteindelijk zal, als we al onze experimentele en theoretische inzichten over de aard van de natuur op haar kleinste schaal bestudeerd hebben, blijken dat de gehele deeltjesfysica door *een enkele Lagrangiaan* kan worden beschreven: alle formules, bewegingsvergelijkingen, en theoretische voorspellingen over deeltjes, velden en hun wisselwerkingen volgen uit die ene Lagrangiaan. Dit is één van de voordelen van het gebruik van het Lagrangiaanse formalisme. Er zijn er nog een aantal, en die zullen in de eerstvolgende secties worden behandeld.

7.5 Behouden grootheden

Zoals bekend zijn er een aantal grootheden die tijdens fysische processen niet van waarde (en richting, in het geval van vectoren) zullen veranderen in de tijd. Zulke grootheden worden *behouden* genoemd. Bekende behouden grootheden uit de klassieke mechanica zijn energie E , impuls $\vec{p}$, en impulsmoment L van een verzameling deeltjes die met elkaar in interactie zijn. Een specifiek voorbeeld is de beweging van de planeten rond de zon: ondanks het feit dat de positie, snelheid, en afstand tot de zon van elke planeet op zijn baan rond de zon op elk moment anders is, wordt zijn energie op elk moment in de baan door hetzelfde getalletje gegeven. In hetzelfde voorbeeld geldt dit ook voor het impulsmoment. Het bestaan van behouden grootheden levert vaak enorm rekenkundig voordeel op bij het oplossen van de bewegingsvergelijkingen, omdat we in staat zijn een heel deel van de mogelijke oplossingen uit te sluiten. Immers, alleen die oplossingen die de behouden grootheden inderdaad constant houden, zijn toegestaan. Ook maakt het gebruik van behouden grootheden het mogelijk om conclusies te trekken over het beschouwde proces zonder ook maar de bewegingsvergelijkingen te hoeven oplossen. Zo kan de omlooptijd van een planeet om de zon worden uitgedrukt als functie van de afstand tot de zon⁵, zonder daarbij de details van de omloopbaan te kennen.

Ook in andere takken van de klassieke natuurkunde zijn er behouden grootheden bekend. Een voorbeeld uit de klassieke elektrodynamica is de elektrische lading van deeltjes, en voorbeelden uit de deeltjesfysica zijn in de eerdere hoofdstukken van dit dictaat geïntroduceerd: leptongetal, baryongetal, kleurlading, en, in het geval dat de zwakke interactie wordt genegeerd, vreemdheid.

Een vraag die dan gesteld kan worden is de volgende: wat is de oorsprong van een gegeven behouden grootheid? In het geval van de klassieke mechanica kunnen het behoud van (mechanische) energie, impuls en impulsmoment rigoreus worden bewezen met behulp van de Wetten van Newton, maar veelal wordt het bestaan van behouden grootheden *gepostuleerd*, en dan meestal naar aanleiding van experimentele gegevens. Het formalisme van

⁵De uitkomst is de zogenaamde *Derde Wet van Kepler*.

Lagrange stelt ons echter in staat om te bewijzen dat er behouden grootheden bestaan, en door welke uitdrukkingen ze worden gegeven. Het blijkt dat het bestaan van behouden grootheden een diepe connectie kent met de zogenaamde symmetrieën van een fysisch systeem. Dit uiterst belangrijke feit staat bekend als het *Theorema van Noether*, en kan als volgt worden geformuleerd:

Voor elke symmetrie van de Lagrangiaan van een fysisch systeem kent dit systeem een behouden grootheid.

In wat volgt zullen we het Noether Theorema bewijzen en de consequenties ervan voor de deeltjesfysica onderzoeken.

7.6 Bewijs van het Noether Theorema

Hiertoe beschouwen we een Lagrangiaan $\mathcal{L}$ van een quantummechanisch systeem. We zullen bewust geen uitspraken doen over de vorm van de Lagrangiaan, zodat onze conclusies zo algemeen mogelijk zullen zijn. Het enige dat we zullen aannemen is dat de Lagrangiaan een functie is van een gegeven quantumveld $\Phi(x)$, en van de tijdruimteafgeleides, $\partial_\mu \Phi(x)$, van het veld:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi). \quad (7.53)$$

Deze aanname is erg algemeen, en wordt voldaan door de Lagrangianen van het Klein-Gordon veld en het Dirac veld.

We zullen vervolgens een verstoring $\delta\Phi$ op het veld aanbrengen,

$$\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi. \quad (7.54)$$

In tegenstelling tot eerder zullen we deze keer niet aannemen dat de verstoring $\delta\Phi$ nul is op de rand van het volume. Fysisch betekent dit simpelweg dat de eindwaarden van Φ niet meer vastliggen: we doen geen uitspraak meer over begin of eindtoestand van het beschouwde fysische proces.

Ten gevolge van de verstoring van het veld zal de Lagrangiaan van het systeem ook veranderen,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' \equiv \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \quad (7.55)$$

met een hoeveelheid $\delta\mathcal{L}$ waarvan de precieze details afhangen van de oorspronkelijke Lagrangiaan en de aard van de verstoring $\delta\Phi$. Voor bepaalde verstoringen $\delta\Phi$, echter, zal de nieuwe Lagrangiaan $\mathcal{L}'$ er als volgt uitzien:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\alpha F^\alpha, \quad (7.56)$$

voor een bepaalde set functies $F^\alpha(\Phi)$. Als de verandering $\delta\Phi$ van het veld deze verandering van de Lagrangiaan tot gevolg heeft, noemen we de operatie $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$ een *symmetrieoperatie* van de Lagrangiaan.

De reden voor deze naam is simpelweg dat de oorspronkelijke Lagrangiaan, $\mathcal{L}$, en de nieuwe, $\mathcal{L}'$, dezelfde actie S tot gevolg hebben. Immers, als we Eq.(7.56) integreren over de ruimtetijd vinden we de actie

$$S' = \int \{ \mathcal{L} + \partial_\alpha F^\alpha \} d^4x. \quad (7.57)$$

De tweede term in de integrand is de divergentie van de functies F^α , en dus kan deze term worden geschreven als de oppervlakteintegraal van F^α . Als we aannemen dat de functies F^α naar nul gaan op oneindig grote afstand, is de bijdrage van de tweede term in de integrand van Eq.(7.57) gelijk aan nul, en is er gevolgd dat beide Lagrangianen dezelfde actie tot gevolg hebben: $S = S'$. Fysisch betekent dit dat de natuur zich op precies dezelfde manier gedraagt voor beide Lagrangianen. Immers, als de acties hetzelfde zijn, moet gelden dat ze hetzelfde pad Φ kennen dat ze minimaliseert, zodat de beweging van het veld $\Phi(x)$ in beide gevallen dezelfde is. De naam 'symmetrieoperatie' is dan ook correct gekozen.

Het is nu eenvoudig aan te tonen dat er voor elke symmetrieoperatie $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$ van een Lagrangiaan het systeem een behouden grootheid kent. Hiertoe hoeven we alleen te bepalen wat de vorm van de verstoring $\delta\mathcal{L}$ is ten gevolge van de operatie, en die gelijk te stellen aan $\partial_\mu F^\mu$. De verstoring $\delta\mathcal{L}$ is al eens voorgerekend in de vorige sectie:

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right) \right) \delta\Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi \right) \quad (7.58)$$

Eerder dicteerde het principe van Minimale Actie dat de integraal hiervan, die daar δS heette, gelijk moest zijn aan nul, en dit voorschrift gaf ons dan vervolgens de Euler-Lagrange vergelijkingen *onder de voorwaarde dat de begin en eindwaarden van $\delta\Phi$ gelijk waren aan nul*. Deze keer hadden we deze aanname echter niet gedaan. Als het veld alsnog de Euler-Lagrange vergelijkingen voldoet, is de eerste term gelijk aan nul, en volgt er

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi \right) \quad (7.59)$$

Omdat de verstoring van het veld Φ een symmetrieoperatie was, geldt per definitie dat deze uitdrukking gelijk moet zijn aan $\partial_\mu F^\mu$. Er volgt dan ook

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - F^\mu \right) = 0, \quad (7.60)$$

oftewel

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu \equiv \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi - F^\mu \right). \quad (7.61)$$

De gevonden vergelijking is een zogenaamde *continuïteitsvergelijking*: een wiskundige uitdrukking die zegt dat de tijdsafgeleide gelijk is aan de som van de plaatsafgeleides. Fysisch betekent dit dat een grootheid niet zomaar kan veranderen in de tijd: hoeveel er van de grootheid verdwijnt van een gegeven positie moet door een volume heen zijn gegaan. Veel

fysisch meetbare grootheden voldoen aan een continuïteitsvergelijking; voorbeelden zijn energie, elektrische stroom. Uitzonderingen zijn er ook; massa is er een van.

We hebben nu gevonden dat een systeem dat beschreven wordt door een Lagrangiaan met een symmetrie Eq.(7.56) een grootheid j^μ kent die voldoet aan de continuïteitsvergelijking. De grootheid j^μ wordt de *Noetherstroom* genoemd.

We kunnen vervolgens aantonen dat de ruimteintegraal van de nulde component j^0 van de Noetherstroom een behouden grootheid is, oftewel dat dit een getalswaarde kent die niet verandert. Hiertoe integreren we $\partial_0 j^0$ en gebruiken we de continuïteitsvergelijking

$$\int \partial_0 j^0 d^3x = \int \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - F^\mu \right) d^3x. \quad (7.62)$$

De rechterzijde van deze vergelijking is een divergentie van een ruimteintegraal, zodat de Stelling van Gaus zegt dat dit gelijk is aan een oppervlakteintegraal

$$\int \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - F^\mu \right) d^3x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - F^\mu \right) dA. \quad (7.63)$$

Onder de gebruikelijke aanname dat de integrand naar nul gaat in het ruimtelijk oneindige, volgt dat deze integraal gelijk is aan nul. In de linkerzijde van Eq.(7.62) kunnen de ruimteintegraal en de tijdsafgeleide worden verwisseld, zodat deze gelijk is aan

$$\int \partial_0 j^0 d^3x = \partial_0 \left(\int j^0 d^3x \right), \quad (7.64)$$

en volgens Eq.(7.62) is dit gelijk aan nul. Hiermee is aangetoond dat de uitdrukking $\int j^0 d^3x$ niet verandert in de tijd, en dus een behouden grootheid is. Dit bewijst het Theorema van Noether.

7.7 Voorbeeld: behoud van impuls en energie

Een van de gevolgen van het Theorema van Noether is dat aangetoond kan worden onder welke symmetrieoperatie de energie en de impuls van een systeem behouden zijn. Het blijkt de operatie van het verschuiven van de ruimte en tijdcoördinaten te zijn. Om dit aan te tonen, beschouwen we de volgende verstoring van de coördinaten:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu \quad (7.65)$$

Als gevolg hiervan wordt het veld $\Phi(x)$ ook verstoord, en wel als volgt:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x + \epsilon) \approx \Phi(x) + (\partial_\mu \Phi(x)) \epsilon^\mu \quad (7.66)$$

waar een eerste orde Taylor-benadering is gebruikt. Op dezelfde manier kan de verstoring van de Lagrangiaan worden berekend:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x + \epsilon) \approx \mathcal{L}(x) + (\partial_\mu \mathcal{L}(x)) \epsilon^\mu. \quad (7.67)$$

Hieruit volgt direct de uitdrukking voor de verstoring van de Lagrangiaan: $\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\mathcal{L}(x))\epsilon^\mu$. Aangezien de verstoring ϵ^μ van de coördinaten constant is, mag ϵ^μ binnen de afgeleide worden genomen, en volgt zo dat de verstoring van de Lagrangiaan precies van de vorm van Eq.(7.56) is, met $F^\mu = \epsilon^\mu\mathcal{L}$. We hebben dan ook gevonden dat de Lagrangiaan de constante verschuiving van de tijdruimtecoördinaten als symmetrieoperatie heeft. Volgens het Theorema van Noether volgt dan direct dat de volgende uitdrukking voldoet aan de continuïteitsvergelijking $\partial_\mu J^\mu = 0$:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi - F^\mu \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}(\partial_\alpha\Phi)\epsilon^\alpha - \epsilon^\mu\mathcal{L} \end{aligned} \quad (7.68)$$

waarin de gevonden uitdrukkingen voor $\delta\Phi$ en F^μ zijn ingevuld. Er geldt dus

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (7.69)$$

en dat de uitdrukking $\int J^0 d^3x$ behouden is in de tijd.

Dit is een volkomen correcte uitdrukking van de behouden grootte ten gevolge van de symmetrie onder verschuiving van tijdruimtecoördinaten. Echter, de gevonden uitdrukking zegt meer dan louter dit: door de tweede ϵ dezelfde index α te geven als de eerste, $\epsilon^\mu = \delta_\alpha^\mu\epsilon^\alpha$, kan de uitdrukking ook worden geschreven als

$$J^\mu = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}(\partial_\alpha\Phi) - \delta_\alpha^\mu\mathcal{L} \right) \epsilon^\alpha \equiv T_\alpha^\mu \epsilon^\alpha. \quad (7.70)$$

waarin een *tensor* T_α^μ is gedefinieerd. Het feit dat J^μ een behouden grootte is wil zeggen dat $\partial_\mu J^\mu = 0$, zodat

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \partial_\mu(T_\alpha^\mu \epsilon^\alpha) \\ &= (\partial_\mu T_\alpha^\mu)\epsilon^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (7.71)$$

waar is gebruikt dat de verschuiving ϵ^α constant is en daarom buiten de afgeleide kan worden genomen. Het feit dat de verschuivingen $\epsilon^t, \epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z$ ieder *willekeurig* te kiezen zijn betekent dat uitdrukking tussen haakjes nul moet zijn. We vinden dan ook dat de tensor T_α^μ aan de continuïteitsvergelijking voldoet:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (7.72)$$

en dat het de volgende uitdrukking is die constant is in de tijd:

$$\int T_\nu^0 d^3x = \text{constant}. \quad (7.73)$$

Merk op dat dit *vier* verschillende behouden grootheden zijn: voor elke waarde van de index ν één. Dit was te verwachten: immers, we hadden aangetoond dat de Lagrangiaan

symmetrisch was onder vier operaties $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$, zodat we op basis van Noether's Theorema evenzoveel behoudswetten mochten verwachten. De eerder gevonden *enkele* behoudswet Eq.(7.69) was dan ook nog niet scherp genoeg.

Nu de vier behouden grootheden zijn gevonden, rest ons alleen nog aan te tonen dat ze overeenkomen met de Wet van Behoud van Energie en de Wet van Behoud van Impuls. Hiertoe bekijken we de elk van de componenten ν per stuk. Als $\nu = 0$ (wat overeenkomt met een verschuiving van de coördinaat x^0 , oftewel de tijdcoördinaat t), is de behouden grootheid gegeven door

$$\int T_0^0 d^3x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} (\partial_0 \Phi) - \mathcal{L} \right) d^3x \quad (7.74)$$

Deze uitdrukking oogt van dezelfde vorm als de Hamiltoniaan,

$$H = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 x)} (\partial_0 x) - L, \quad (7.75)$$

die we kennen uit de klassieke mechanica; zie Eq.(7.16). De verschillen zijn dat, hier, de afgeleides naar het veld Φ zijn en dat het geheel geïntegreerd wordt over de ruimte. Dit is volkomen in lijn met het feit dat in quantummechanische processen de dynamische variabelen gegeven zijn door velden (in plaats van plaatscoördinaten) en met het feit dat we in quantummechanische processen gebruik maken van Lagrangiaan-dichtheden $\mathcal{L}$ (in plaats van Lagrangianen L). Het ligt dan ook voor de hand om de gevonden behouden grootheid te identificeren als de energie van het quantumveld Φ . We hebben gevonden dat de Wet van Behoud van Energie het gevolg is van het feit dat de verschuiving van de tijdcoördinaat een symmetrieoperatie van de Lagrangiaan is.

Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat de overige drie componenten van de behouden grootheid Eq.(7.72) overeenkomen met de impuls van het quantumveld. Als $\nu = i$, is de behouden grootheid gegeven door

$$\int T_i^0 d^3x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} (\partial_i \Phi) \right) d^3x. \quad (7.76)$$

wat, in vergelijking met de klassieke uitdrukking Eq.(7.15), suggereert dat deze uitdrukking de impuls in de ruimtelijke richting x^i beschrijft. Het ligt dan ook voor de hand om deze grootheid te identificeren als de impuls p_i van het quantumveld Φ . We hebben gevonden dat de Wet van Behoud van Impuls het gevolg is van het feit dat de verschuiving van de ruimtecoördinaten symmetrieoperaties van de Lagrangiaan zijn.

We zullen als afsluiting de uitdrukkingen geven voor energie en impuls van het Klein-Gordonveld en van het Diracveld. Hiertoe vullen we de Lagrangianen in van de respectievelijke velden en vinden dan voor de Hamiltoniaan H en de impuls P van het Klein-Gordonveld:

$$H = \frac{1}{2} \int \{(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2\} d^3x, \quad P_i = \frac{1}{2} \int \{\partial_0(\phi) \partial_i \phi\} d^3x, \quad (7.77)$$

en voor die van het Dirac veld:

$$H = \int i \{ \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi \} d^3x, \quad P_i = \int i \{ \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \} d^3x. \quad (7.78)$$

De uitdrukkingen voor de energie en impuls van het Klein-Gordon veld zijn duidelijk reëel, en zijn bovendien positief (ze bestaan immers uit een integraal van de som van kwadraten). Die voor de energie en impuls van het Dirac-veld ogen complex. Het is echter eenvoudig om aan te tonen dat ook die wel degelijk reëel zijn en daarom fysische grootheden kunnen voorstellen. Hiertoe hoeft alleen maar te worden aangetoond dat de complex geconjugeerde van de integrand gelijk is aan zichzelf, oftewel dat er geldt:

$$i\bar{\psi}\gamma^0\partial_\mu\psi = (i\bar{\psi}\gamma^0\partial_\mu\psi)^+, \quad (7.79)$$

(we hebben hier de hermitische conjugatie gebruikt; dit is toegestaan omdat de uitdrukking tussen haakjes een scalair is; voor scalairen geldt dat de hermitische conjugatie gelijk is aan de complexe conjugatie.) Via de regel $(AB)^+ = B^+A^+$, de definitie $\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0$ en het feit dat $(\gamma^0)^2 = 1$ en $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ kan de rechterzijde worden geschreven als

$$\begin{aligned} (i\bar{\psi}\gamma^0\partial_\mu\psi)^+ &= -i(\partial_\mu\psi^+)\psi \\ &= -i\partial_\mu(\psi^+\psi) + i\psi^+\partial_\mu\psi, \end{aligned} \quad (7.80)$$

waar in de tweede regel de produktregel van differentieren is gebruikt. Tenslotte gebruiken we het feit dat vrije Dirac-velden geschreven kunnen worden als (een som) van vlakke golven, zodat $\psi \propto e^{ix^\mu p_\mu}$ en daarom $\psi^+\psi$ geen plaats-of tijdsafhankelijkheid kent. De eerste term in Eq.(eq:termen) is dan nul, en zo is gevolgd dat er inderdaad aan de eis is voldaan dat de uitdrukking gelijk is aan zijn hermitisch geconjugeerde. Hiermee is aangetoond dat de uitdrukkingen voor de energie en impuls van het vrije Dirac veld inderdaad reëel zijn. Het is echter niet duidelijk of ze ook *positief* zijn. We zullen hier in een later hoofdstuk op terugkomen.