Kwantummechanica Donderdag, 13 oktober 2016

OPGAVEN SET HOOFDSTUK 4

VECTOREN OVER DE REËLE RUIMTE
DUS DE ELEMENTEN ZIJN REËLE GETALLEN

Bestudeer Appendix A, bladzijden 110 - 114 van het dictaat.

Opgave 1: Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{A} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Bereken het inproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Bereken ook de cosinus van de hoek tussen de richtingen van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Oplossing: Het inproduct is gelijk aan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2 \cdot 7) + (-2 \cdot +3) + (+3 \cdot -1) = 5. \tag{1}$$

De lengte van $\mathbf{A}$ is $|\mathbf{A}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{62}$, terwijl de lengte van $\mathbf{B}$ gelijk is aan $|\mathbf{B}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$. Voor het inproduct geldt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$. Hiermee geldt voor de cosinus van de hoek tussen de richtingen van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$,

$$\cos\angle\mathbf{A};\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{5}{\sqrt{62}\sqrt{14}} = 0.170. \tag{2}$$

Opgave 2: Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Bewijs dat $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ lineair afhankelijk zijn en daarom evenwijdig aan eenzelfde vlak.

Oplossing: Indien de vectoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ lineair afhankelijk zijn, dan kunnen we $\mathbf{A}$ uitdrukken in de basis opgespannen door de vectoren $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$. Er geldt dan

$$\mathbf{A} = c_1\mathbf{B} + c_2\mathbf{C}, \tag{3}$$

met c_1 en c_2 coëfficiënten. Hiermee vinden we het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1B_1 + c_2C_1 \\ A_2 &= c_1B_2 + c_2C_2 \\ A_3 &= c_1B_3 + c_2C_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Invullen van de componenten levert

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_1 + 5c_2 \\ -1 &= 3c_1 + 5c_2 \\ 2 &= -c_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Dit heeft als oplossing $c_1 = -2$ en $c_2 = 1$, waarmee de afhankelijkheid bewezen is.

Opgave 3: Bewijs dat voor elke vector $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt dat $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$.

Oplossing: Neem aan dat het uitproduct $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ resulteert in de vector $\mathbf{C}$. We vinden dan

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \tag{6}$$

Omdat **C** loodrecht staat op zowel **A** als **B** zijn beide inproducten gelijk aan nul.

VECTOREN OVER DE COMPLEXE RUIMTE
DUS DE ELEMENTEN ZIJN COMPLEXE GETALLEN

Bestudeer Appendix A, bladzijden 117 - 124 van het dictaat.

Opgave 4: De ongelijkheid van Scharz luidt, $| <\alpha|\beta> |^2 \leq <\alpha|\alpha><\beta|\beta>$. Bewijs deze ongelijkheid. Hint: neem aan dat $|\gamma>=|\beta>-(<\alpha|\beta>/<\alpha|\alpha>)|\alpha>$, en gebruik $<\gamma|\gamma> \geq\ 0$.

Oplossing: We definiëren de vector

$$|\gamma>\equiv|\beta>-\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}|\alpha>\ . \tag{7}$$

Vervolgens berekenen we het inproduct

$$\begin{aligned} <\gamma|\gamma> &= \left(<\beta|-\frac{<\beta|\alpha>}{<\alpha|\alpha>}<\alpha|\right)\cdot\left(|\beta>-\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}|\alpha>\right) \\ &= <\beta|\beta>-\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}<\beta|\alpha>-\frac{<\beta|\alpha>}{<\alpha|\alpha>}<\alpha|\beta>+\frac{<\beta|\alpha>}{<\alpha|\alpha>}\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}<\alpha|\alpha> \\ &= <\beta|\beta>-\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}<\beta|\alpha>-\frac{<\beta|\alpha>}{<\alpha|\alpha>}<\alpha|\beta>+\frac{<\beta|\alpha><\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>} \\ &= <\beta|\beta>-\frac{<\alpha|\beta>}{<\alpha|\alpha>}<\beta|\alpha>\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Omdat $<\gamma|\gamma\geq 0$ geldt

$$<\beta|\beta>-\frac{|<\alpha|\beta>|^2}{<\alpha|\alpha>}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad <\beta|\beta><\alpha|\alpha>-|<\alpha|\beta>|^2\geq 0. \tag{9}$$

Hiermee is de Cauchy-Schwarz relatie bewezen,

$$|<\alpha|\beta>|^2\leq\|\alpha\|^2\cdot\|\beta\|^2. \tag{10}$$

Opgave 5: Bereken de hoek tussen de vectoren $|\alpha>=(1+i)\mathbf{i}+\mathbf{j}+i\mathbf{k}$ en $|\beta>=(4-i)\mathbf{i}+(2-2i)\mathbf{k}$.

Oplossing: Er geldt

$$\begin{aligned} <\alpha|\alpha> &= (1-i)(1+i)+1^2+i^2=4 \\ <\beta|\beta> &= (4+i)(4-i)+(2+2i)(2-2i)=25 \\ <\alpha|\beta> &= (1-i)(4-i)+(-i)(2-2i)=1-7i \\ <\alpha|\beta><\alpha|\beta>^* &= (1-7i)(1+7i)=50. \end{aligned} \tag{11}$$

De hoek volgt uit de relatie

$$\cos\theta\equiv\sqrt{\frac{<\alpha|\beta><\alpha|\beta>*}{<\alpha|\alpha><\beta|\beta>}}=\sqrt{\frac{50}{4\cdot 25}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{12}$$

Opgave 6: Gegeven zijn de matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

en bereken

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

b) $\mathbf{AB}$,

c) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$,

d) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,

e) $\mathbf{A}^*$,

f) $\mathbf{A}^\dagger$,

g) $\det(\mathbf{B})$,

h) $\mathbf{B}^{-1}$.

Oplossing: We vinden het volgende:

Ad a) De som $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ is

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1+2 & 1+0 & i-i \\ 2+0 & 0+1 & 3+0 \\ 2i+i & -2i+3 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3i & (3-2i) & 4 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ad b) Het product $\mathbf{AB}$ is

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} (-1\cdot 2 + 1\cdot 0 + i\cdot i) & (-1\cdot 0 + 1\cdot 1 + i\cdot 3) & (-1\cdot -i + 1\cdot 0 + i\cdot 2) \\ (2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot i) & (2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 3) & (2\cdot -i + 0\cdot 0 + 3\cdot 2) \\ (2i\cdot 2 - 2i\cdot 0 + 2\cdot i) & (2i\cdot 0 - 2i\cdot 1 + 2\cdot 3) & (2i\cdot -i - 2i\cdot 0 + 2\cdot 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & (1+3i) & 3i \\ (4+3i) & 9 & (6-2i) \\ 6i & (6-2i) & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ad c) Om de commutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ te bepalen, berekenen we eerst het product $\mathbf{BA}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} (2\cdot -1 + 0\cdot 2 - i\cdot 2i) & (2\cdot 1 + 0\cdot 0 - i\cdot -2i) & (2\cdot i + 0\cdot 3 - i\cdot 2) \\ (0\cdot -1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2i) & (0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot -2i) & (0\cdot i + 1\cdot 3 + 0\cdot 2) \\ (i\cdot -1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 2i) & (i\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot -2i) & (i\cdot i + 3\cdot 3 + 2\cdot 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ (6+3i) & -3i & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

Hiermee vinden we voor de commutator

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{B}] &= \mathbf{AB}-\mathbf{BA} \\
&= \begin{pmatrix} -3-0 & (1+3i)-0 & 3i-0 \\ (4+3i)-2 & 9-0 & (6-2i)-3 \\ 6i-(6+3i) & (6-2i)+3i & 6-12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & (1+3i) & 3i \\ (2+3i) & 9 & (3-2i) \\ (-6+3i) & (6+i) & -6 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Ad d) De getransponeerde matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ is

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2i \\ 1 & 0 & -2i \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Ad e) De geconjugeerde matrix $\mathbf{A}^*$ is

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -i \\ 2 & 0 & 3 \\ -2i & 2i & 2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Ad f) De hermitisch geconjugeerde matrix $\mathbf{A}^\dagger$ is

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2i \\ 1 & 0 & +2i \\ -i & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Ad g) De determinant $\det(\mathbf{B})$ is

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Als we dit volgens de eerste rij ontwikkelen, vinden we

$$\det(\mathbf{B}) = 2(1\cdot 2 - 0\cdot 3) - 0(0\cdot 2 - 0\cdot i) - i(0\cdot 3 - 1\cdot i) = 4-1 = 3. \tag{21}$$

Eenvoudiger is het ontwikkelen volgens de tweede rij,

$$\det(\mathbf{B}) = -0 + 1(2\cdot 2 - (-i\cdot i)) - 0 = 3. \tag{22}$$

Ad h) De inverse matrix $\mathbf{B}^{-1}$ behoeft naast de determinant, de berekening van de geadjugeerde matrix $\mathrm{adj}(\mathbf{B})$. De matrixelementen hiervan zijn

$$|\mathbf{B}_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |\mathbf{B}_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ i & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |\mathbf{B}_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & 3 \end{vmatrix} = -i, \tag{23}$$

$$|\mathbf{B}_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3i, \quad |\mathbf{B}_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad |\mathbf{B}_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ i & 3 \end{vmatrix} = 6, \tag{24}$$

$$|\mathbf{B}_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i, \quad |\mathbf{B}_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & -i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad |\mathbf{B}_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \tag{25}$$

zodat

$$\mathrm{adj}\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3i & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{dus} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -i & \frac{i}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{3} & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Opgave 7: Gebruik de vierkante matrices uit opgave (6) en de kolommatrices

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix},$$

en bereken

a) $\mathbf{Aa}$.

b) $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}$,

c) $\mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{Bb}$,

d) $\mathbf{ab}^\dagger$.

Oplossing: We vinden het volgende:

Ad a) Het product $\mathbf{Aa}$ wordt gegeven door

$$\mathbf{Aa} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot i + 1\cdot 2i + i\cdot 2 \\ 2\cdot i + 0\cdot 2i + 3\cdot 2 \\ 2i\cdot i - 2i\cdot 2i + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 6+2i \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Ad b) Het inproduct $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}$ kan geschreven worden als

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} = (-i, -2i, 2) \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix} = -i\cdot 2 + (-2i)(1-i) + 2\cdot 0 = -2-4i. \tag{28}$$

Ad c) We schrijven $\mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{Bb}$ als

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{Bb} &= (i, 2i, 2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (i, 2i, 2) \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot(1-i) - i\cdot 0 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot(1-i) + 0\cdot 0 \\ i\cdot 2 + 3\cdot(1-i) + 2\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= (i, 2i, 2) \begin{pmatrix} 4 \\ (1-i) \\ (3-i) \end{pmatrix} \\ &= i\cdot 4 + 2i\cdot(1-i) + 2\cdot(3-i) \\ &= 8+4i. \end{aligned} \tag{29}$$

Ad d) De uitdrukking $\mathbf{ab}^\dagger$ wordt geschreven als

$$\mathbf{ab}^\dagger = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} (2, (1+i), 0) = \begin{pmatrix} i\cdot 2 & i\cdot(1+i) & i\cdot 0 \\ 2i\cdot 2 & 2i\cdot(1+i) & 2i\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(1+i) & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -1+i & \\ 4i & -2+2i & \\ 4 & 2+2i & \end{pmatrix}. \tag{30}$$

LINEAIRE RUIMTE: DE ELEMENTEN ZIJN REËLE GETALLEN

Opgave 8: Is de verzameling van alle functies die differentieerbaar zijn op een gegeven interval een lineaire ruimte?

Oplossing: Ja, de verzameling L van alle functies die differentieerbaar zijn op een gegeven interval vormt een lineaire ruimte. We kunnen dit inzien door te verifiëren dat deze verzameling van deze functies voldoen aan de definitie voor een lineaire ruimte over een getallenlichaam K. Hiervoor geldt

- $\forall_{f(x),g(x)\in L}\exists!_{\mathbf{h(x)}\in L}[f(x)+g(x)=h(x)]$
- $\forall_{p\in K,f(x)\in L}\exists!_{h(x)\in L}[pf(x)=h(x)]$,

terwijl de volgende acht axioma's gelden

1. $\forall_{f(x),g(x)\in L}[f(x)+g(x)=g(x)+f(x)]$
2. $\forall_{f(x),g(x),h(x)\in L}[(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))]$
3. $\exists_{\mathbf{0}\in L}\forall_{f(x)\in L}[f(x)+0=f(x)]$
4. $\forall_{f(x)\in L}\exists_{-f(x)\in L}[f(x)+(-f(x))=0]$
5. $\forall_{p,q\in K,f(x)\in L}[(p+q)f(x)=pf(x)+qf(x)]$
6. $\forall_{f(x),g(x)\in L,p\in K}[p(f(x)+g(x))=pf(x)+pg(x)$
7. $\forall_{p,q\in K,f(x)\in L}[p(qf(x))=(pq)f(x)]$
8. $\forall_{f(x)\in L}[1f(x)=f(x)]$

Indien $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn, dan is $h(x)=f(x)+g(x)$ in alle gevallen ook differentieerbaar, want $h'(x)=f'(x)+g'(x)$. Tenslotte, als $f(x)$ differentieerbaar is, dan is $h(x)=pf(x)$ ook differentieerbaar, want $h'(x)=pf'(x)$. Dus is $h(x)$ ook een element van de verzameling van alle functies die differentieerbaar zijn op een gegeven interval.

Opgave 9: Toon aan dat $\mathbb{R}$ een reële lineaire ruimte is. Is $\{0\}$ een lineaire ruimte? En $\{1\}$?

Oplossing: De verzameling $L=\mathbb{R}$ vormt een reële lineaire ruimte is. We verifiëren expliciet de twee belangrijkste voorwaarden:

- $\forall_{a,b\in L}\exists!_{c\in L}[a+b=c]$. Het resultaat van optellen van twee elementen, a en b uit $\mathbb{R}$ is het getal c, dat ook weer element is van de verzameling $L=\mathbb{R}$.
- $\forall_{p\in K,a\in L}\exists!_{c\in L}[pa=c]$. We kunnen ook de vermenigvuldiging van een element a uit $\mathbb{R}$ met een getal p definiëren. Het resultaat c is dan weer een element van de verzameling $L=\mathbb{R}$. Op deze wijze kunnen ook de andere axioma's expliciet worden.

De verzameling $\{0\}$ is een (triviale) lineaire ruimte. Verder is $\{1\}$ geen lineaire ruimte, omdat de ruimte geen nulelement bevat.

Opgave 10: Is $\{f|f''(x)-2f'(x)-3f(x)=0\}$ een lineaire ruimte?

Oplossing: De set $\{f|f''(x)-2f'(x)-3f(x)=0\}$ vormt een lineaire ruimte. We beschouwen twee elementen van deze ruimte, $f(x)$ en $g(x)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} f''(x)-2f'(x)-3f(x) &= 0 \quad \text{en} \\ g''(x)-2g'(x)-3g(x) &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Stel $h(x)=f(x)+g(x)$, dan geldt $h'(x)=f'(x)+g'(x)$ en $h''(x)=f''(x)+g''(x)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} \big(f''(x)-2f'(x)-3f(x)\big)+\big(g''(x)-2g'(x)-3g(x)\big) &= 0 \rightarrow \\ \big(f''(x)+g''(x)\big)-2\left(f'(x)+g'(x)\right)-3\left(f(x)+g(x)\right) &= 0 \rightarrow \\ h''(x)-2h'(x)-3h(x) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

We zien dat ook $h(x)$ voldoet aan de eisen gesteld aan de lineaire ruimte.

De set $\{f|f''(x)-2f'(x)-3f(x)=x^2\}$ vormt geen lineaire ruimte. We verifiëren dit weer op dezelfde wijze. We beschouwen twee elementen van deze ruimte, $f(x)$ en $g(x)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} f''(x)-2f'(x)-3f(x) &= x^2 \quad \text{en} \\ g''(x)-2g'(x)-3g(x) &= x^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Stel $h(x)=f(x)+g(x)$, dan geldt $h'(x)=f'(x)+g'(x)$ en $h''(x)=f''(x)+g''(x)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} \big(f''(x)-2f'(x)-3f(x)-x^2\big)+\big(g''(x)-2g'(x)-3g(x)-x^2\big) &= 0 \rightarrow \\ \big(f''(x)+g''(x)\big)-2\left(f'(x)+g'(x)\right)-3\left(f(x)+g(x)\right) &= 2x^2 \rightarrow \\ h''(x)-2h'(x)-3h(x) &= 2x^2 \neq x^2. \end{aligned} \tag{34}$$

We zien dat $h(x)$ niet voldoet aan de eisen gesteld aan de lineaire ruimte.