Kwantummechanica Donderdag, 6 oktober 2016

OPGAVEN SET HOOFDSTUK 4

VECTOREN OVER DE REËLE RUIMTE
DUS DE ELEMENTEN ZIJN REËLE GETALLEN

Bestudeer Appendix A, bladzijden 110 - 114 van het dictaat.

Opgave 1: Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{A} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Bereken het inproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Bereken ook de cosinus van de hoek tussen de richtingen van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Opgave 2: Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Bewijs dat $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ lineair afhankelijk zijn en daarom evenwijdig aan eenzelfde vlak.

Opgave 3: Bewijs dat voor elke vector $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt dat $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$.

VECTOREN OVER DE COMPLEXE RUIMTE
DUS DE ELEMENTEN ZIJN COMPLEXE GETALLEN

Bestudeer Appendix A, bladzijden 117 - 124 van het dictaat.

Opgave 4: De ongelijkheid van Cauchy-Scharz luidt, $| < \alpha|\beta > |^2 \leq < \alpha|\alpha >< \beta|\beta >$. Bewijs deze ongelijkheid. Hint: neem aan dat $|\gamma >= |\beta > -(< \alpha|\beta > / < \alpha|\alpha >)|\alpha >$, en gebruik $< \gamma|\gamma > \geq\ 0$.

Opgave 5: Bereken de hoek tussen de vectoren $|\alpha >= (1+i)\mathbf{i}+\mathbf{j}+i\mathbf{k}$ en $|\beta >= (4-1)\mathbf{i}+(2-2i)\mathbf{k}$.

Opgave 6: Gegeven zijn de matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

en bereken

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

b) $\mathbf{AB}$,

c) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$,

d) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,

e) $\mathbf{A}^*$,

f) $\mathbf{A}^\dagger$,

g) $\det(\mathbf{B})$,

h) $\mathbf{B}^{-1}$.

Opgave 7: Gebruik de vierkante matrices uit opgave (6) en de kolommatrices

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix},$$

en bereken

a) $\mathbf{Aa}$.

b) $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$,

c) $\mathbf{a}^\mathrm{T} \mathbf{Bb}$,

d) $\mathbf{ab}^\dagger$.

LINEAIRE RUIMTE: DE ELEMENTEN ZIJN REËLE GETALLEN

Opgave 8: Is de verzameling van alle functies die differentieerbaar zijn op een gegeven interval een lineaire ruimte?

Opgave 9: Toon aan dat $\mathbb{R}$ een reële lineaire ruimte is. Is $\{0\}$ een lineaire ruimte? En $\{1\}$?

Opgave 10: Is $\{f|f''(x) - 2f'(x) - 3f(x) = 0\}$ een lineaire ruimte?

En is $\{f|f''(x) - 2f'(x) - 3f(x) = x^2\}$ een lineaire ruimte?

Merk op dat de notatie $\{f|$... betekent: de verzameling van alle functie f, waarvoor geldt ...