Kwantummechanica Donderdag, 29 september 2016

OPGAVEN SET HOOFDSTUK 1 - OPLOSSINGEN

ALGEMENE VRAGEN

Opgave 1: Wat is de maximum snelheid dat een deeltje kan hebben, zodat zijn kinetische energie geschreven kan worden als $\frac{1}{2}mv^2$ met een fout die niet groter is dan 0.5%?

Oplossing: In de klassieke mechanica is de relatie tussen kinetische energie en impuls gelijk aan

$$T_{\text{klassiek}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}. \tag{1}$$

De relativistisch correcte relatie tussen totale energie en impuls is

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{2}$$

waarbij E behalve kinetische energie, de rustenergie mc^2 bevat. Voor de kinetische energie vinden we in dit geval

$$T = E - mc^2 = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} - mc^2 = mc^2\left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} - 1\right]. \tag{3}$$

Wiskundig Intermezzo: Stel dat $f(x)$ geschreven kan worden als een machtreeks,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{4}$$

We kunnen de coëfficiënten vinden door afgeleiden te nemen en vervolgens de waarde ervan te bepalen voor bijvoorbeeld $x = 0$. Dus

$$\begin{array}{ll}
f(x) \quad = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots & f^{(0)}(0) = a_0 \\
f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots & f^{(1)}(0) = a_1 \\
f^{(2)}(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \cdots & f^{(2)}(0) = 2a_2 \\
f^{(3)}(x) = 2\cdot 3a_3 + \cdots & f^{(3)}(0) = 2\cdot 3a_3 \\
\cdots & \cdots
\end{array} \tag{5}$$

Hiermee zien we dat voor de coëfficiënten van de machtreeks geldt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{6}$$

We kunnen de machtreeks dan ook schrijven als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{7}$$

Indien x dus niet al te groot is, kunnen we $\sqrt{1+x}$ (zie vergelijking (3)) in een reeks ontwikkelen en vinden

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots . \tag{8}$$

Het is illustratief om te zien wat er gebeurt als we enkel de eerste twee termen invullen in vergelijking (3).

$$T = mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} - 1\right] \approx mc^2 \left[1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - 1\right] = \frac{p^2}{2m}. \tag{9}$$

We zien dat de eerste twee termen overeenkomen met de niet-relativistische uitdrukking, gegeven in vergelijking (1). De termen met $k \geq 2$ vormen een relativistische correctie. De derde term geeft een correctie ter grootte

$$\Delta T = mc^2 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2 = \frac{p^4}{8m^3c^2}. \tag{10}$$

De relatieve correctie bedraagt

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{p^4}{8m^3c^2} \Big/ \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{4m^2c^2}. \tag{11}$$

De relativistische uitdrukking voor de impuls is gelijk aan

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

Indien de afwijking minder dan 0.5 % moet zijn, dient te gelden

$$\frac{p^2}{4m^2c^2} \leq 0.005 \Rightarrow \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.005 \cdot 4m^2c^2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{c^2}{v^2} - 1} = 0.02. \tag{13}$$

Uitschrijven levert de conditie $v \leq \frac{1}{10}\sqrt{2}c \approx 0.14c$, met c de lichtsnelheid.

Opgave 2: Bereken de impuls van een 12.0 MeV foton.

Oplossing: Tussen energie en impuls geldt de relatie

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{14}$$

Deze relatie is relativistisch correct, waarbij E de rustenergie mc^2 bevat. Fotonen zijn massaloos, $m = 0$, en er geldt dus $E = pc$. We vinden hiermee

$$p = 12.0\ \frac{\text{MeV}}{c} = \frac{(12.0 \times 10^6\ \text{eV}) \cdot (1.6 \times 10^{-19})\ \text{C}}{3 \times 10^8\ \text{m/s}} = 6.4 \times 10^{-21}\ \text{kg m/s}. \tag{15}$$

Opgave 3: Bereken de frequentie van een foton dat geproduceerd wordt als een elektron met 20 keV tot stilstand wordt gebracht in een botsing met een zware kern.

Oplossing: In dit geval wordt de volledige kinetische energie van het elektron omgezet in foton energie, $E_{\text{foton}} = h\nu = T_{\text{elektron}}$. Gegeven is dat $T_{\text{elektron}} = 20$ keV $= (20 \times 10^3\ \text{eV}) \cdot (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 3.2 \times 10^{-15}$ J. We vinden voor de frequentie van het foton

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{3.2 \times 10^{-15}\ \text{J}}{6.6 \times 10^{-34}\ \text{Js}} = 4.8 \times 10^{18}\ \text{Hz}. \tag{16}$$

Merk op dat de bijbehorende golflengte gelijk is aan

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8\ \text{m/s}}{4.8 \times 10^{18}\ \text{Hz}} = 0.062\ \text{nm}. \tag{17}$$

Dit proces heet in de natuurkunde Bremstrahlung en wordt bijvoorbeeld gebruikt voor het opwekken van Röntgenstraling in ziekenhuizen. Meer informatie is te vinden op de volgende website, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/xrayc.html.

Opgave 4: Bepaal de maximum golflengte van een foton dat een molekuul kan separeren waarvan de bindingsenergie 15 eV is.

Oplossing: Moleculen zijn opgebouwd uit atomen. Als we extern voldoende energie toevoegen, meer dan de bindingsenergie van het molecuul, dan kunnen we moleculen weer opbreken. Deze energie kan bijvoorbeeld worden overgebracht met fotonen. In het voorbeeld geldt $E_{\text{foton}} \geq E_{\text{binding}} = 15$ eV $= h\nu$. Hiermee vinden we voor de frequentie

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{(15 \text{ eV}) \cdot (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}} = 3.6 \times 10^{15} \text{ Hz}. \tag{18}$$

De bijbehorende golflengte gelijk is aan

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3.6 \times 10^{15} \text{ Hz}} = 8.3 \times 10^{-8} \text{ m}. \tag{19}$$

Opgave 5: Monochromatisch licht met een golflengte van 3000 Å valt loodrecht op een oppervlak van 4 cm^2. Als de intensiteit van het licht 15 $\times$ 10^{-2} W/m^2 is, bepaal dan het aantal fotonen dat per seconde het oppervlak raakt.

Oplossing: Monochromatisch licht is licht met één specifieke golflengte, in dit geval 3000 Å. De golflengte is dus $\lambda = (3000) \cdot (10^{-10} \text{ m}) = 3 \times 10^{-7}$ m. Hiermee vinden we voor de frequentie

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^{-7} \text{ m}} = 1.0 \times 10^{15} \text{ Hz}. \tag{20}$$

De energie per foton bedraagt $E = h\nu = (6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (1.0 \times 10^{15} \text{ Hz}) = 6.6 \times 10^{-19}$ J. Het licht valt loodrecht op een oppervlak van $A = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ met een intensiteit van 15 $\times$ 10^{-2} W/m^2. Dit betekent dat het vermogen $P = IA = (15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2) \cdot (4 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 6.0 \times 10^{-5}$ J/s is. Het aantal fotonen dat per seconde het oppervlak raakt is dus gelijk aan

$$\dot{N} = \frac{P}{E} = \frac{6.0 \times 10^{-5} \text{ J/s}}{6.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 9.1 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}. \tag{21}$$

Opgave 6: Een radiostation werkt bij een frequentie van 103.7 MHz met een vermogen van 200 kW. Bepaal het aantal fotonen dat door dit station wordt uitgezonden.

Oplossing: De frequentie bedraagt $\nu = 1.037 \times 10^8$ Hz. De energie van een dergelijk foton is $E = h\nu = (6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (1.037 \times 10^8 \text{ Hz}) = 6.9 \times 10^{-26}$ J. Het vermogen bedraagt $P = 2.0 \times 10^5$ J/s. Door dit station wordt per seconde

$$\dot{N} = \frac{P}{E} = \frac{2.0 \times 10^5 \text{ J/s}}{6.9 \times 10^{-26} \text{ J}} = 2.9 \times 10^{30} \text{ s}^{-1} \tag{22}$$

fotonen uitgezonden.

FOTO-ELEKTRISCH EFFECT

Opgave 7: Beschouw een kalium oppervlak dat 75 cm verwijderd is van een 100 W lamp. Neem aan dat de energie die door de lamp als licht wordt uitgezonden 5 % van het vermogen is. Behandel elk kaliumatoom als een cirkelvormige schijf met een diameter van 1 Å en bepaal de tijd die nodig voor elk atoom om een hoeveelheid licht te absorberen die gelijk is aan zijn werkfunctie van 2.0 eV, in overeenstemming met de golfinterpretatie van licht.

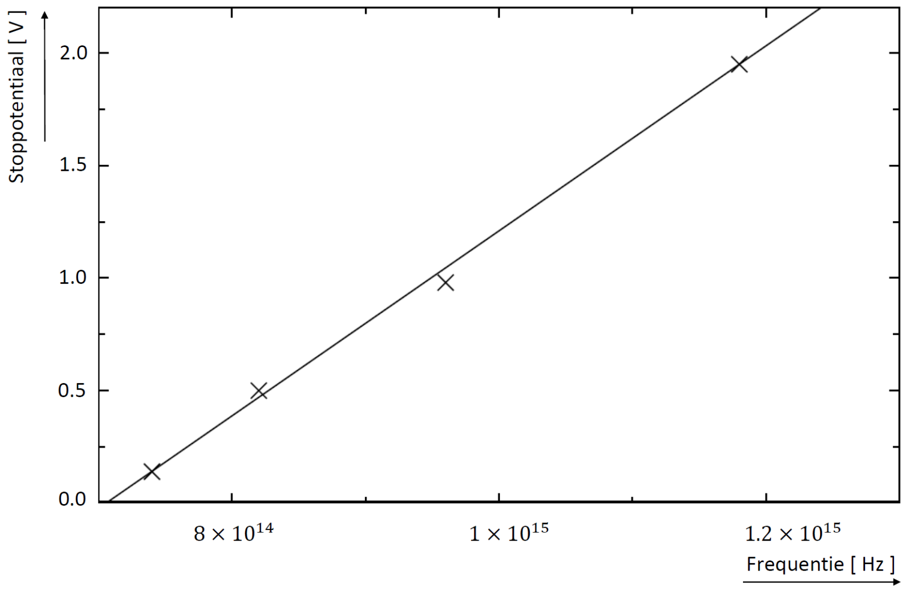
Oplossing: Elk kaliumatoom heeft een effectief oppervlak van $A_{\text{atoom}} = \frac{\pi}{4}d^2 = (\frac{\pi}{4})\cdot(10^{-10}\text{ m}^2) = 7.85\times10^{-21}\text{ m}^2$. De lamp zendt per seconde een lichtenergie uit van $P = \epsilon P_{\text{lamp}} = 0.05\cdot100\text{ W} = 5\text{ J/s} = (5\text{ J/s})/(1.6\times10^{-19}\text{ C}) = 3.1\times10^{19}\text{ eV/s}$. Dit licht wordt in alle richtingen uitgezonden en slechts een fractie ervan bereikt het kaliumatoom,

$$P_{\text{kaliumatoom}} = P\frac{A_{\text{atoom}}}{A_{\text{bol met straal 0.75 m}}} = \frac{(3.1\times10^{19}\text{ eV/s})(7.85\times10^{-21}\text{ m}^2)}{4\pi(0.75\text{ m})^2} = 0.034\text{ eV/s}. \tag{23}$$

Bij een werkfunctie van 2.0 eV duurt het dus gemiddeld $t = \frac{2.0\text{ eV}}{0.034\text{ eV/s}} = 58$ s voordat voldoende licht geabsorbeerd is om een elektron uit te zenden, INDIEN WE DE KLASSIEKE FYSICA HANTEREN. Een dergelijke vertraging is nooit waargenomen!

Opgave 8: Als een fotoelektrisch experiment wordt uitgevoerd met calcium als emitter, dan worden de volgende stoppotentialen gevonden: 1.95 V bij een golflengte van 2535 Å, 0.98 V bij 3122 Å, 0.50 V bij 3650 Å en 0.14 V bij 4047 Å. Bereken uit deze data de constante van Planck.

Als eerste verzamelen we nu de meetgegevens in een grafiek, gegeven in Fig. 1. De grafiek geeft



Figuur 1: *Fotoelektrisch effect: de stoppotentiaal is uitgezet als functie van de frequentie van het invallende licht.*

een weergave van de relatie

$$eV_0 = h\nu - \phi = h\frac{c}{\lambda} - \phi. \tag{24}$$

Vergelijken met het lineair verband $y = ax + b$ leert dat we de constante van Planck kunnen bepalen uit de helling van de data. Deze helling kan bijvoorbeeld gevonden worden met de kleinste-kwadraten methode en het resultaat is weergegeven door de lijn in Fig. 1. We bepalen de helling en vinden $a = 4.11\times10^{-15}$ eV/Hz. We dienen dit te vermenigvuldigen met de lading van het elektron, $q = e = 1.6\times10^{-19}$ C en vinden 6.57×10^{-34} Js, hetgeen in redelijke overeenstemming is met de standaardwaarde $h = 6.626\times10^{-34}$ Js.

Opgave 9: De emitter is een foto-elektrische buis heeft een drempelgolflengte van 6000 Å. Bepaal de golflengte van het invallende licht als de stoppotentiaal voor dit licht 2.5 V is.

Oplossing: De drempelgolflengte correspondeert met die golflengte van straling waarbij er elektronen worden vrijgemaakt. De energie van die straling correspondeert dan met de werkfunctie. De frequentie volgt uit $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8 \text{ m/s}}{6000\times10^{-10} \text{ m}} = 5.0 \times 10^{14}$ Hz. De werkfunctie van het materiaal is dan $\phi = h\nu = (6.626 \times 10^{-34} \text{ Js})(5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 3.31 \times 10^{-19}$ J. Met $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C vinden we dan $\phi = 3.31 \times 10^{-19} \text{ J}/1.6 \times 10^{-19} = 2.07$ eV. Vervolgens valt er licht op de fotobuis, waarbij er een stoppotentiaal van $V_0 = 2.5$ V nodig is. De frequentie van die straling is dan

$$h\nu = \phi + eV_0 \to \nu = \frac{\phi + eV_0}{h} = \frac{(2.07 + 2.5)\cdot(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}} = 1.1 \times 10^{15} \text{ Hz}. \tag{25}$$

De bijbehorende golflengte is $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8 \text{ m/s}/1.1 \times 10^{15} \text{ Hz} = 272$ nm.

Opgave 10: Kalium wordt beschenen met ultraviolet licht met een golflengte van 2500 Å. Als de werkfunctie van kalium 2.21 eV is, wat is dan de maximum kinetische energie van de uitgezonden elektronen?

Oplossing: Er geldt $h\nu = \phi + eV_0$, waarbij $\phi = 2.21$ eV is. De frequentie volgt uit $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8 \text{ m/s}}{2500\times10^{-10} \text{ m}} = 1.2 \times 10^{15}$ Hz. Voor de maximum kinetische energie vinden we dan

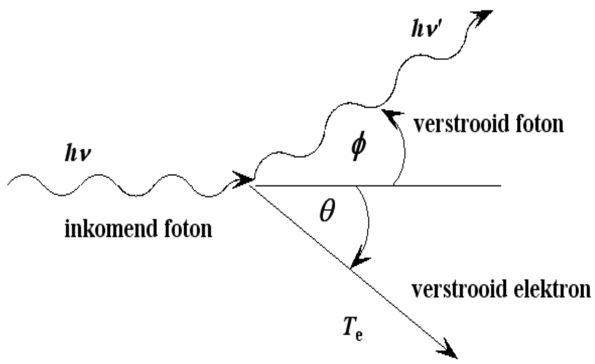
$$eV_0 = h\nu - \phi = (6.626\times10^{-34} \text{ Js})(1.2\times10^{15} \text{ Hz}) - (1.6\times10^{-19} \text{ C})(2.21 \text{ eV}) = 4.41\times10^{-19} \text{ J}. \tag{26}$$

Dit is gelijk aan $4.4 \times 10^{-19} \text{ J}/1.6 \times 10^{-19} \text{ C} = 2.75$ eV.

COMPTONVERSTROOIING

Opgave 11: Leidt de Comptonvergelijking $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$ af.

Oplossing: We kunnen de uitdrukking voor $\Delta\lambda$ afleiden door energie- en impulsbehoud te combineren. We beschouwen Compton verstrooiing als een elastische botsing; zie Fig. 2. Voor



Figuur 2: *Compton verstrooiing van een foton aan een elektron kan worden beschouwd als een elastische botsing.*

energiebehoud geldt

$$h\nu = h\nu' + T_e, \tag{27}$$

waarbij T_e de kinetische energie van het over een hoek θ teruggestoten elektron voorstelt. Behoud van impuls geeft

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\phi + p\cos\theta \qquad x \text{ component} \tag{28}$$

en

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\phi = p\sin\theta \qquad y \text{ component} \tag{29}$$

met p de impuls van het verstrooide elektron. Vervolgens kwadrateren we beide vergelijkingen.

$$\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\phi\right)^2 = p^2\cos^2\theta \tag{30}$$

en

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 \sin^2\phi = p^2\sin^2\theta. \tag{31}$$

We tellen nu beide vergelijkingen op en vinden

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{2h\nu h\nu'}{c^2}\right)\cos\phi + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 \cos^2\phi = p^2\cos^2\theta \tag{32}$$

en

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 \sin^2\phi = p^2\sin^2\theta. \tag{33}$$

Omdat $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ vinden we

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{2h\nu h\nu'}{c^2}\right)\cos\phi + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = p^2. \tag{34}$$

Voor het elektron hebben we $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ en als T_e de kinetische energie is, dan geldt

$$(T_e + mc^2)^2 = c^2p^2 + (mc^2)^2 \rightarrow T_e^2 + 2T_emc^2 = c^2p^2 \tag{35}$$

of

$$\frac{T_e^2}{c^2} + 2T_em = p^2. \tag{36}$$

Voor T_e gebruiken we vergelijking (27) en voor p^2 vergelijking (34) en vinden

$$\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\right)^2 + 2mc\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\right) = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\phi \tag{37}$$

en

$$mc\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\right) = \frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}(1-\cos\phi) \tag{38}$$

en dus

$$\frac{1}{h\nu'/c} - \frac{1}{h\nu/c} = \frac{1}{mc}(1-\cos\phi) \tag{39}$$

Er geldt $\nu = \frac{c}{\lambda}$ en $\frac{c}{h\nu} = \frac{c\lambda}{hc} = \frac{\lambda}{h}$. We vermenigvuldigen met h en vinden

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi), \tag{40}$$

waarbij $\frac{h}{mc} = 0.0243 \times 10^{-10}$ m de zogenaamde Compton golflengte is.

Opgave 12: Een Röntgenstraal met een golflengte van 0.300 Å ondergaat een Comptonverstrooiing over 60°. Vindt de golflengte van het verstrooide foton en de energie van het elektron dat na de verstrooiing wordt uitgezonden.

Oplossing: De golflengte van het verstrooide foton volgt uit

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi), \tag{41}$$

waarbij $\lambda = 0.3 \times 10^{-10}$ m en $\frac{h}{mc} = 0.0243 \times 10^{-10}$ m. Omdat $\phi = 60°$ geldt $(1 - \cos 60°) = 0.5$ en vinden we

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) = 0.3 \times 10^{-10}\ \text{m} + 0.0243 \times 10^{-10}\ \text{m} \cdot 0.5 = 0.312 \times 10^{-10}\ \text{m}. \tag{42}$$

De kinetische energie van het elektron, T_e, volgt uit de wet van behoud van energie, $h\nu = h\nu' + T_e \to T_e = h\,(\nu - \nu')$. We vinden

$$T_e = h\left(\nu - \nu'\right) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right). \tag{43}$$

Invullen levert

$$T_e = (6.626\times10^{-34}\ \text{Js})(3\times10^{8}\ \text{m/s})\left(\frac{1}{0.3 \times 10^{-10}\ \text{m}} - \frac{1}{0.312 \times 10^{-10}\ \text{m}}\right) = 2.6\times10^{-16}\ \text{J}. \tag{44}$$

Dit komt overeen met $T_e = 1.6$ keV.

Opgave 13: Een Röntgenfoton van 0.3 MeV ondergaat een frontale botsing met een elektron in rust. Gebruik de wetten van behoud van energie en impuls om de snelheid van het teruggestoten elektron te vinden.

Oplossing: Met een frontale botsing wordt bedoeld dat $\phi = 180°$ en dus geldt $(1 - \cos 180°) = 2$. Een Röntgenfoton van 0.3 MeV heeft een energie van $E = (0.3\times10^{6})(1.6\times10^{-19}) = 4.8\times10^{-14}$ J. Hiermee correspondeert een frequentie van $\nu = E/h = 4.8\times10^{-14}\ \text{J}/6.626\times10^{-34}\ \text{Js} = 7.2\times10^{19}$ Hz en een golflengte van $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^{8}\ \text{m/s}/7.2 \times 10^{19}\ \text{Hz} = 4.1 \times 10^{-12}$ m.
De golflengte van het verstrooide foton is

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) = 4.1 \times 10^{-12}\ \text{m} + 0.0243 \times 10^{-10}\ \text{m} \cdot 2 = 8.96 \times 10^{-12}\ \text{m}. \tag{45}$$

De energie van het verstrooide foton is dan

$$E' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{8.96 \times 10^{-12}\ \text{m}} = 2.2 \times 10^{-14}\ \text{J} = 137\ \text{keV}. \tag{46}$$

We vinden nu voor de kinetische energie van het elektron

$$T_e = h(\nu - \nu') = 4.8 \times 10^{-14}\ \text{J} - 2.2 \times 10^{-14}\ \text{J} = 2.6 \times 10^{-14}\ \text{J} = 163\ \text{keV}. \tag{47}$$

De impuls van het elektron volgt uit

$$E^2 = (T_e + m_e c^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \tag{48}$$

De rustenergie van een elektron bedraagt

$$m_e c^2 = (9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 8.2 \times 10^{-14}\ \text{J} = 511\ \text{keV}. \tag{49}$$

Voor de totale energie van het elektron vinden we dan $E = T_e + m_e c^2 = 2.6 \times 10^{-14}\ \text{J} + 8.2 \times 10^{-14}\ \text{J} = 1.1 \times 10^{-13}\ \text{J} = 674$ keV. De impuls volgt nu uit

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - (mc^2)^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(1.1 \times 10^{-13}\ \text{J})^2 - (8.2 \times 10^{-14}\ \text{J})^2}{(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2}} = 2.4 \times 10^{-22}\ \text{kg m/s}. \tag{50}$$

De snelheid volgt uit een relativistische uitdrukking,

$$\mathbf{v} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E} \rightarrow v = \frac{2.4 \times 10^{-22} \text{ kg m/s}}{1.1 \times 10^{-13} \text{ J}} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}. \tag{51}$$

Dit correspondeert met 65 % van de lichtsnelheid.

WATERSTOFATOOM

Opgave 14: Bepaal de golflengten van waterstof die in het optische spectrum (3800 Å tot 7700 Å) liggen.

Oplossing: Voor de golflengten van de lijnen in het waterstofspectrum geldt

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{u^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{R}\frac{l^2u^2}{u^2 - l^2}. \tag{52}$$

met $u = 1, 2, \cdots$ en $l = 1, 2, \cdots$ quantumgetallen. Verder is $R = 0.01097$ nm^{-1} de Rydberg constante.

Merk op dat $R^{-1} = 91$ nm. We zien dus dat er geen golflengten van zichtbaar licht corresponderen met overgangen van aangeslagen toestanden, $u = 2, 3, \cdots$, naar de grondtoestand met $l = 1$. Zichtbaar zijn wel overgangen naar de eerste aangeslagen toestand, met $l = 2$. Bijvoorbeeld

$$\begin{array}{ccc} u = 3 & \lambda_{3\rightarrow 2} = 656 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 4 & \lambda_{4\rightarrow 2} = 485 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 5 & \lambda_{5\rightarrow 2} = 433 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 6 & \lambda_{6\rightarrow 2} = 410 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 7 & \lambda_{7\rightarrow 2} = 396 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 8 & \lambda_{8\rightarrow 2} = 388 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 9 & \lambda_{9\rightarrow 2} = 381 \text{ nm} & \text{wel} \\ u = 10 & \lambda_{10\rightarrow 2} = 379 \text{ nm} & \text{niet.} \end{array} \tag{53}$$

Toestanden met $l \geq 3$ zijn niet zichtbaar.

OPGAVEN SET HOOFDSTUK 2

DE BROGLIE

Opgave 1: Bepaal de versnelspanning die nodig is om een elektron een de Broglie-golflengte van 1 Å te geven. Dit correspondeert met de grootte van de inter-atoomafstanden van een kristal.

Oplossing: De kinetische energie van het elektron is gelijk aan de elektrostatische energie,

$$\frac{p^2}{2m} = eV, \tag{54}$$

met p, m en e respectievelijk de impuls, massa en lading van het elektron. De versnelspanning wordt gerepresenteerd door V. De de Broglie golflengte λ staat met de impuls in verband volgens

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{55}$$

met h de constante van Planck. Hiermee vinden we voor de versnelspanning

$$\begin{aligned} V &= \frac{p^2}{2me} \\ &= \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2 \cdot e} \\ &= \frac{(6,626 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js})^2}{2 \cdot (9,1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}) \cdot (10^{-10}\ \mathrm{m})^2 \cdot (1,6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})} \\ &= 151\ \mathrm{V}. \end{aligned} \tag{56}$$

Merk op dat de kinetische energie van 151 eV klein is ten opzichte van de massa van het elektron, $m = 511$ keV, en dat het gebruik van de niet-relativistische uitdrukking voor de kinetische energie dus gerechtvaardigd is.

Opgave 2: Bereken de de Broglie-golflengte van een thermisch neutron met een energie van 0.05 eV.

Oplossing: De kinetische energie van een zogenaamd thermisch neutron wordt gegeven door $\frac{3}{2}kT$, met k de constante van Boltzmann en T de temperatuur. We zien dat een energie van 0,05 eV overeen komt met een temperatuur van

$$\begin{aligned} T &= \frac{2E}{3k} \\ &= \frac{2 \cdot (0,05\ \mathrm{eV})}{3k} \\ &= \frac{2 \cdot (0,05\ \mathrm{eV}) \cdot (1,6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{2 \cdot (1,38 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1})} \\ &= 387\ \mathrm{K}. \end{aligned} \tag{57}$$

We berekenen allereerst de energie van dit neutron. Er geldt

$$\frac{p^2}{2m_n} = E_n = 0,05\ \mathrm{eV} = (0,05\ \mathrm{eV}) \cdot (1,6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 8,0 \times 10^{-21}\ \mathrm{J}. \tag{58}$$

Er geldt voor de impuls

$$p = \sqrt{2m_n E_n} = \sqrt{2 \cdot (1,67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (8,0 \times 10^{-21}\ \mathrm{J})} = 5,2 \times 10^{-24}\ \mathrm{kg\ m/s}. \tag{59}$$

Voor de de Broglie golflengte vinden we

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{5,2 \times 10^{-24}\ \mathrm{kg\ m/s}} = 1,28 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}. \tag{60}$$

Opgave 3: Bereken de energie van een proton met een golflengte van 0.5 fm (1 fm $= 10^{-15}$ m $= 10^{-5}$ Å $= 1$ fermi).

Oplossing: De impuls van het proton wordt gegeven door

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{0,5 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}} = 1,32 \times 10^{-18}\ \mathrm{kg\ m/s}. \tag{61}$$

De totale energie (inclusief rustenergie) volgt uit

$$E^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4 \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_p^2c^4} \tag{62}$$

en dus

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(1,32 \times 10^{-18} \text{ kg m/s})^2 \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 + (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})^2 \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})^4} \\ &= 4,23 \times 10^{-10} \text{ J.} \end{aligned} \tag{63}$$

De totale energie is dus

$$E = \frac{(4,23 \times 10^{-10} \text{ J}) \cdot 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 2.642 \text{ MeV} \tag{64}$$

en hiervan is 2.642 - 938 = 1.704 MeV de kinetische energie (938 MeV correspondeert met de rustenergie van het proton - $E_{\text{rust}} = m_pc^2$).

Opgave 4: Als je een object wilt observeren dat 2.5 Å groot is, wat is dan de minimum energie van het foton dat gebruikt kan worden?

Oplossing: Het oplossend vermogen van een microscoop volgt uit de onzekerheidsrelatie

$$\Delta x \Delta p \approx h. \tag{65}$$

Er geldt $\Delta x \Delta k \approx 2\pi$. Het verband tussen impuls en golfgetal is $p = \hbar k$ en dus geldt $\Delta p = \hbar \Delta k$. Invullen levert weer vergelijking (65).

We hebben nu $\Delta x = 2,5 \times 10^{-10}$ m. Teneinde dit object te kunnen observeren hebben we deeltjes met een minimum impuls nodig van

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2,5 \times 10^{-10} \text{ m}} = 2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \tag{66}$$

De energie van het foton volgt uit

$$E = pc = (2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 7,9 \times 10^{-16} \text{ J.} \tag{67}$$

Dit komt overeen met

$$E = \frac{7,9 \times 10^{-16} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 4,96 \text{ keV.} \tag{68}$$

Opgave 5: Bereken opgave 4 nogmaals, maar nu voor elektronen in plaats van fotonen.

Oplossing: Voor elektronen geldt ook weer dat

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = 2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \tag{69}$$

De bijbehorende energie volgt uit

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{(2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s})^2}{2 \cdot (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 3,9 \times 10^{-18} \text{ J.} \tag{70}$$

Dit komt overeen met

$$E = \frac{3,9 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 24 \text{ eV.} \tag{71}$$

Opgave 6: Thermische neutronen vallen in op een NaCl (zout) kristal (interatomaire afstand 2.81 Å). De neutronen ondergaan eerste-orde diffractie aan de Braggvlakken onder een hoek van 20°. Wat is de energie van deze neutronen?

Oplossing: Voor Braggse diffractie geldt de relatie

$$2d\sin\theta = n\lambda, \tag{72}$$

met d de roosterconstante van het kristal, θ de diffratiehoek en n de orde van diffractie. Voor eerste-orde diffractie geldt dat $n = 1$. Invullen levert voor de golflengte,

$$\lambda = 2d\sin\theta = 2\cdot(2,81\times10^{-10}\ \text{m})\cdot\sin 20^\circ = 1,92\times10^{-10}\ \text{m}. \tag{73}$$

De impuls van de neutronen is dan

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6\times10^{-34}\ \text{Js}}{1,92\times10^{-10}\ \text{m}} = 3,45\times10^{-24}\ \text{kg m/s}. \tag{74}$$

De kinetische energie van deze neutronen bedraagt

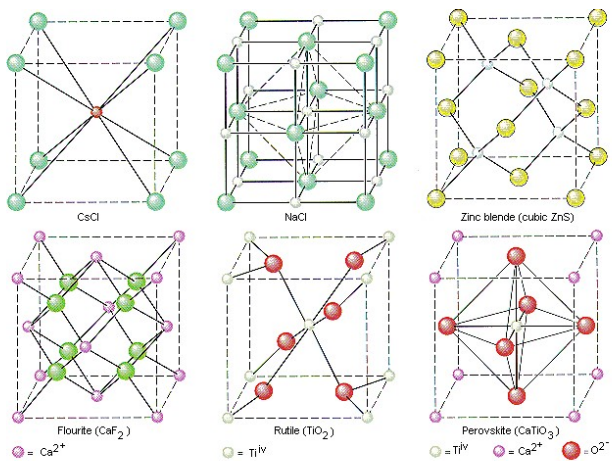
$$E_n = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(3,45\times10^{-24}\ \text{kg m/s})^2}{2\cdot(1,67\times10^{-27}\ \text{kg})} = 3,55\times10^{-21}\ \text{J}. \tag{75}$$

Dit komt overeen met

$$E = \frac{3,55\times10^{-21}\ \text{J}}{1,6\times10^{-19}\ \text{C}} = 0,022\ \text{eV}. \tag{76}$$

Opgave 7: Bepaal de interatomaire afstand voor een NaCl kristal als de dichtheid van NaCl gelijk is aan $2.16\times10^3\ \text{kg/m}^3$ en de atoomgewichten voor natrium en chloor gelijk zijn aan 23.00 en 35.46, respectievelijk.

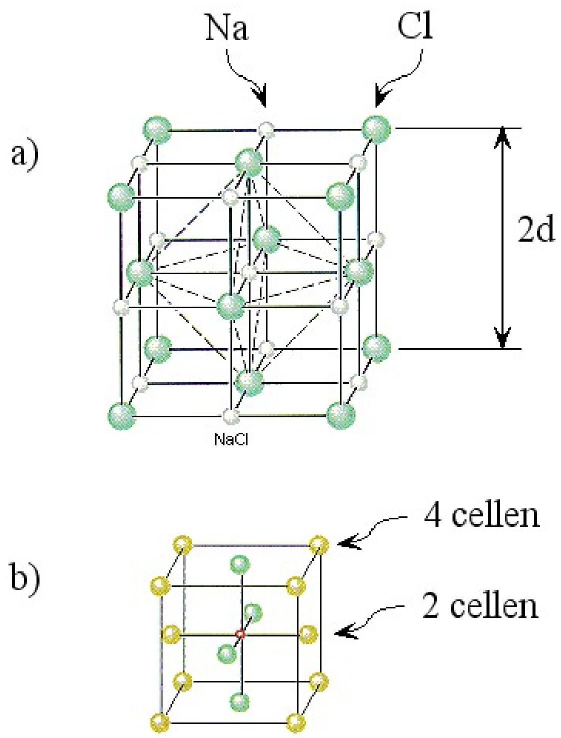
Oplossing: Om deze vraag te kunnen beantwoorden, dienen we het kristalrooster van NaCl te begrijpen. Zoals figuur 3 toont, zijn er diverse kristalroosters. Het rooster van NaCl is kubisch.



Figuur 3: *Overzicht van diverse kristalroosters.*

Het atoomgewicht van NaCl bedraagt

$$M_{\text{NaCl}} = 23,00 + 35,46 = 58,46. \tag{77}$$



Figuur 4: *Het rooster van NaCl. We zien dat de 8 moleculen die zich op de hoekpunten bevinden, onderdeel zijn van 8 cellen. Verder zijn de 6 moleculen in het midden van de zijvlakken, onderdeel van 6 cellen.*

Dit betekent dat 58,46 gram van het zout, $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ NaCl moleculen bevat. Hierbij is N_A het getal van Avogadro.

Figuur 4 toont dat NaCl een kubisch kristalrooster heeft, waarbij de eenheidscel een ribbe heeft met lengte $2d$, waarbij d de gezochte roosterconstante is. Er bevinden zich 8 moleculen (in feite Cl-ionen) op de hoekpunten van de eenheidscel. Echter, elk van deze moleculen is onderdeel van 8 zulke kubussen. Deze moleculen tellen dus voor $(8 \times \frac{1}{8}) = 1$. Verder heeft de eenheidskubus nog 6 moleculen die zich in het centrum van de zijvlakken bevinden. Elk van deze moleculen wordt door 2 kubussen gedeeld. Deze moleculen tellen dus voor $(6 \times \frac{1}{2}) = 3$. We vinden hiermee dat de eenheidscel een dichtheid heeft van

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{kubus}} &= \frac{\text{massa van } (8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 1 + 3 =)\ 4 \text{ NaCl moleculen}}{\text{celvolume} = (2d)^3} \\
&= \frac{58,46 \times 4 \text{ amu}}{8d^3} \\
&= \frac{58,46 \cdot (1,66 \times 10^{-27} \text{ kg})}{2d^3} \\
&= \frac{9,7 \times 10^{-26} \text{ kg}}{2d^3},
\end{aligned} \tag{78}$$

met d de roosterconstante. De dichtheid van de kubus dient gelijk te zijn aan de dichtheid van

NaCl en we vinden voor de roosterconstante

$$d = \sqrt[3]{\frac{9,7 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}}{2 \cdot (2,16 \times 10^{3}\ \mathrm{kg/m^{3}})}} = 2,82 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}. \tag{79}$$

Opgave 8: Bepaal de fotonflux van een bundel monochromatisch licht met een golflengte van 3000 Å en een intensiteit van 3×10^{-14} W/m^2.

Oplossing: De fotonflux is het aantal fotonen per oppervlakte- en per tijdeenheid. De energie van een foton met een golflengte van 3.000 Å bedraagt

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}) \cdot (3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{3,0 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 6,62 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}. \tag{80}$$

De fotonflux die overeenkomt met een intensiteit van 3×10^{-14} W/m^2 bedraagt

$$\dot{N} = \frac{3 \times 10^{-14}\ \mathrm{W/m^2}}{6,62 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 4,5 \times 10^{4}\ \mathrm{Hz/m^2}. \tag{81}$$