

Tentamen Mechanica (20-12-2006)

Achter iedere opgave is een indicatie van de tijdsbesteding in minuten gegeven. De aangegeven tijd correspondeert ook met de te behalen punten, in totaal 150.
Gebruik van rekenapparaat en formuleblad is toegestaan.

Opgave 1 (5+5)

Gegeven de fundamentele constanten $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$, en $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$; en verder de massa van het elektron, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

- (a) Construeer uit $\hbar$, c en m_e een grootte met dimensie van lengte. Dit is de Compton golflengte λ_e van het elektron. Bereken de grootte.
(oplossing)
Schrijf alles in mks-eenheden ($\text{N} = \text{kg m/s}^2$, $\text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$); beschouw $\hbar^\alpha m_e^\beta c^\gamma$; dit geeft drie vergelijkingen; oplossing geeft $\lambda_e = \hbar/m_e c$ en numeriek $\lambda_e \approx 4 \times 10^{-13} \text{ m}$.
- (b) Construeer uit $\hbar$, c en G een grootte met dimensie van lengte. Dit is de Planck lengte l_P . Bereken de grootte.
(oplossing)
Als onder (a); oplossing geeft $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$ en numeriek $l_P \approx 1,6 \times 10^{-35} \text{ m}$.

Opgave 2 (5 + 5 + 5 + 5)

Voor het traject van een voetbal is de hoogte $h(t)$ (in m) als functie van de tijd t (in s) gegeven evenals de verplaatsing $x(t)$ (in m) in horizontale richting,

$$h(t) = 20t - 5t^2, \\ x(t) = 20t.$$

- (a) Welke hoek met de horizontale richting maakt de bewegingsrichting van de bal in het begin en wat is zijn beginsnelheid?
(oplossing)
De snelheden zijn $v_h(t) = 20 - 10t$ en $v_x = 20$. Dus op tijdstip $t = 0$ hebben we $v_h = v_x = 20 \text{ m/s}$ en de hoek is 45 graden. De snelheid is $\sqrt{(20)^2 + (20)^2} \approx 28 \text{ m/s}$.
- (b) Wat is het hoogste punt en op welk tijdstip wordt dit bereikt?
(oplossing)
 $h(t) = 5(t - 2)^2 + 20$, waaruit we zien dat het hoogste punt wordt bereikt voor $t = 2 \text{ s}$; de hoogte is dan 20 m.
- (c) Hoever komt de bal als alles zich op een horizontaal veld afspeelt?
(oplossing)
De bal raakt de grond als $h(t) = 0$, d.w.z. $t = 4$. De horizontale positie is dan $x(4) = 80$, dus de bal komt 80 m ver.
- (c) Hoever komt de bal als vanaf het vertrekpunt het veld steil (onder een hoek van 45 graden) naar beneden loopt en wat is dan de snelheid van de bal als hij de grond raakt.
(oplossing)
In dat geval raakt de bal de grond als $h(t) = -x(t)$. Dus

$$20t - 5t^2 = -20t,$$

waaruit volgt $5t^2 - 40t = 0$. De oplossing $t = 0$ is het beginpunt. De andere oplossing is $t = 8$. De bal komt dus na 8 s op de helling terecht, 160 m verder in horizontale richting en 160 m lager.

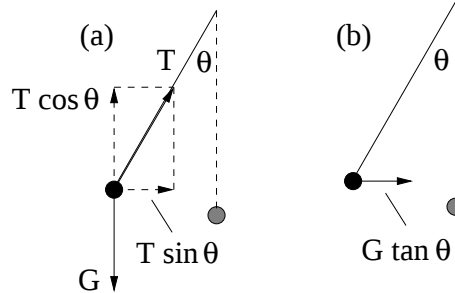
De snelheid van de bal is dan $v_h = -60$ en $v_x = 20$, dus $v = \sqrt{(60)^2 + (20)^2} \approx 63 \text{ m/s}$.

Opgave 3 (20)

Leg uit hoe we met behulp van een slinger in een auto of trein de grootte en richting van de versnelling kunnen meten. Wat moeten we meten? Geef het vrije lichaamsdiagram van de slinger (een met werkzame krachten en hun ontbinding en een met resulterende krachten in de verschillende richtingen).

(oplossing)

We hebben een slinger nodig, waarvan we de hoekuitwijking ten opzichte van de verticale richting kunnen meten. De werkzame krachten zijn zwaartekracht ($G = mg$) en spankracht (T). De spankracht kan worden ontbonden in horizontale ($T \sin \theta$) en verticale ($T \cos \theta$) richtingen. De verticale richting wordt opgeheven door de zwaartekracht. De horizontale component blijft over en correspondeert met de versnelling van de auto/trein. Dus $T \cos \theta = G = mg$ en $F_{\text{tot}} = T \sin \theta = G \tan \theta = mg \tan \theta = ma$. Dus $a = g \tan \theta$. De richting van de versnelling is tegengesteld aan de uitwijkingsrichting.



Opgave 4 (10+10+10)

Gegeven is dat een langlaufer (massa van persoon plus skis is 80 kg) zonder arbeid te verrichten op een flauwe helling (horizontale afstand 1 km, vertikaal hoogteverschil 20 m) met constante snelheid van 18 km/h de helling afgaat.

- (a) Bereken de dynamische wrijvingscoëfficiënt voor de skier.

(oplossing)

Noem de hoek met de horizontaal θ (dus $\tan \theta = 0,02$). De gravitatiekracht kan worden ontbonden in een component $mg \cos \theta$ loodrecht op het oppervlakte, gecompenseerd door de normaalkracht N en een component $mg \sin \theta$ langs het oppervlak naar beneden, gecompenseerd door de tegengestelde wrijvingskracht $W = f N$ (Er is tenslotte geen resulterende kracht!). Dus

$$mg \sin \theta = W = f N = f mg \cos \theta,$$

waaruit volgt dat $f = \tan \theta = 0,02$.

- (b) Wat wordt de versnelling voor een helling waarbij het hoogteverschil 30 m over 1 km is als we de luchtwrijving verwaarlozen?

(oplossing)

In dat geval is $\tan \theta = 0,03$, d.w.z. $\sin \theta \approx 0,03$ en $\cos \theta \approx 1,00$. De normaalkracht is $N = mg \cos \theta \approx mg \approx 800$ N. De wrijvingskracht is $W = f N \approx 0,02 mg \approx 16$ N. De kracht langs de helling is $F_{\text{tot}} = mg \sin \theta - W \approx 0,01 mg \approx 8$ N. De versnelling langs de helling (naar beneden) wordt $a = F_{\text{tot}}/m \approx 0,1 \text{ m/s}^2$.

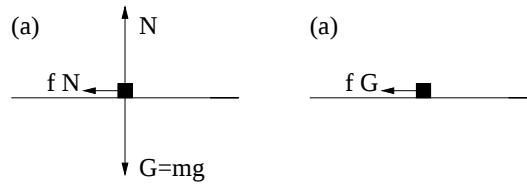
- (c) Welke snelheid haalt de skier op een vlak parcours bij een rustig tempo waarbij hij 40 W verbruikt.

(oplossing)

Op een vlak parcours wordt de zwaartekracht opgeheven door de normaalkracht, dus $N = mg \approx 800$ N. Bij constante snelheid is de benodigde kracht precies gelijk aan de wrijvingskracht $W = f N \approx 16$ N. Het energieverbruik (vermogen) is $P = F \cdot v \approx 16 v = 40 \text{ W} = 40 \text{ Nm/s}$. Dus $v = 2,5 \text{ m/s} = 9 \text{ km/h}$.

Opgave 5 (10+10+10)

- (a) Waardoor wordt de maximale snelheid $v_{\max}$ bepaald waarmee een auto een vlakke bocht (met straal R en een wegdek met statische wrijvingscoëfficiënt f) kan nemen en geef de uitdrukking hiervoor. Teken het bij deze situatie behorende vrije lichaamsdiagram. (oplossing)

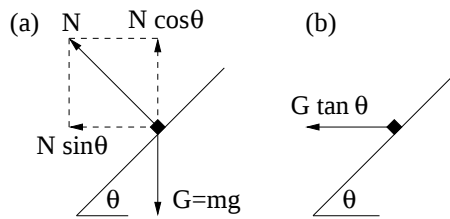


Werkzame krachten zijn zwaartekracht ($G = mg$ omlaag), normaalkracht (N , omhoog gericht) en wrijvingskracht (maximaal fN langs oppervlak). De zwaartekracht wordt gecompenseerd door de normaalkracht, dus $N = mg$. De (statische) wrijving levert de centripetale kracht, dus

$$m \frac{v^2}{R} = fN = fmg,$$

en dus $v_{\max} = \sqrt{f g R}$.

- (b) Wat is de snelheid v_0 waarbij een auto zonder wrijving een hellende bocht (hellingshoek θ , straal R) kan nemen. Teken het vrije lichaamsdiagram. (oplossing)



De werkzame krachten zijn zwaartekracht ($G = mg$ omlaag) en normaalkracht (N , loodrecht op oppervlak). De resulterende kracht moet langs de horizontale richting naar middelpunt van de bocht/cirkel gericht zijn. De normaalkracht kan ontbonden worden in componenten $N \cos \theta$ omhoog en $N \sin \theta$ langs horizontale richting. Een horizontale resultante wordt verkregen wanneer

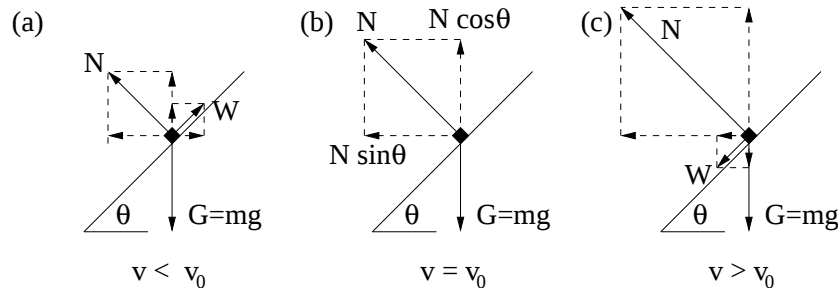
$$G = N \cos \theta.$$

Dat betekent dat $N = mg / \cos \theta$ en

$$m \frac{v_0^2}{R} = N \sin \theta = mg \tan \theta.$$

Dus $v_0 = \sqrt{g R \tan \theta}$.

- (c) Geef m.b.v. vrije lichaamsdiagrammen aan hoe de krachten worden in de situatie onder (b) in de gevallen dat $v < v_0$ en $v > v_0$, respectievelijk. Wat kan er in deze twee gevallen gebeuren als het glad is? (oplossing)



Als $v < v_0$ is een kleinere resultante nodig, dus wrijvingskracht is naar buiten gericht (langs oppervlak met componenten $W \sin \theta$ in verticale en $W \cos \theta$ in horizontale richting). Als het glad is kan het zijn dat deze horizontale component onvoldoende is en de auto schuift naar de binnenkant van de bocht (omlaag).

Als $v > v_0$ is een grotere resultante nodig, dus wrijvingskracht moet meewerken en is naar binnen gericht (in eerste instantie langs oppervlak met een component horizontaal). Als het glad is, is er te weinig wrijving en kan de auto niet in een cirkelbaan met straal R blijven. De auto schuift naar buiten de bocht uit (omhoog).

Opgave 6 (10+15)

- (a) We laten op een wrijvingsloze tafel schijven (allemaal met massa m) met elkaar botsen. De botsingen zijn elastisch. Bereken de snelheden van de schijven na een botsing waarbij we een schijf met snelheid v centraal laten botsen op een stilstaande schijf.

(oplossing)

Behoud van energie en impuls, impliceren

$$\begin{aligned} m v + 0 &= m v_1 + m v_2, \\ \frac{1}{2} m v^2 + 0 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2, \end{aligned}$$

Substitutie van $v_2 = v - v_1$ (uit eerste vergelijking) in de tweede vergelijking geeft

$$v^2 = v_1^2 + (v - v_1)^2 = v^2 - 2 v v_1 + 2 v_1^2.$$

Hieruit vinden we $v_1(v_1 - v) = 0$ met als enige zinvolle oplossing $v_1 = 0$ en $v_2 = v$.

- (b) Wanneer de stilstaande schijf onder een hoek van 45 graden wordt weggestoten, wat gebeurt er dan met de botsende schijf en wat zijn de snelheden van beide schijven na de botsing.

(oplossing)

Behoud van energie en impuls, impliceren, inclusief zijwaartse richting en na wegdelen van factoren $1/2$ en m links en rechts,

$$\begin{aligned} v + 0 &= v_{1x} + v_{2x}, \\ 0 &= v_{1y} + v_{2y}, \\ v^2 + 0 &= v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2. \end{aligned}$$

Verder weten we uit het gegeven dat $|v_{2y}| = |v_{2x}|$. Dus we hebben $|v_{1y}| = |v_{2y}| = |v_{2x}|$ en we krijgen dan

$$\begin{aligned} v + 0 &= v_{1x} + v_{2x}, \\ v^2 + 0 &= v_{1x}^2 + 3 v_{2x}^2, \end{aligned}$$

Substitutie van de eerste in de tweede vergelijking geeft $v^2 = 3 v^2 - 6 v v_{1x} + 4 v_{1x}^2$ oftewel $2 v_{1x}^2 - 3 v v_{1x} + v^2 = 0$, herschreven tot $(2 v_{1x} - v)(v_{1x} - v) = 0$, met als oplossing $v_{1x} = v$ (vervalt want dan worden $v_{2x} = v_{2y} = v_{1y} = 0$) of $v_{1x} = v/2$. In dat laatste geval worden $v_{2x} = v/2$ en $v_{2y} = -v_{1y} = v/2$ (of het omgekeerde teken). In woorden, beide schijven gaan voorwaarts onder een hoek van 45 graden met snelheid $v/\sqrt{2}$.

Opgave 7 (5+10)

In plaats van de schijven uit de vorige opgave beschouwen we nu een centrale botsing van een biljartbal met snelheid v op een stilstaande biljartbal. De botsende biljartbal heeft massa m , straal r en traagheidsmoment t.o.v. zwaartepunt $I = (2/5)mr^2$.

- (a) Geef de bijdragen van zwaartepuntsbeweging en rotatie in de energie van een biljartbal die met snelheid v beweegt.

(oplossing)

Snelheid van het zwaartepunt en rotatiesnelheid zijn gerelateerd via $v = \omega r$. Dat wil zeggen dat naast de kinetische energie ten gevolge van de beweging van het zwaartepunt, $(1/2)mv^2$ er een rotatieenergie is ter grootte van

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{5} mr^2 \omega^2 = \frac{1}{5} mv^2.$$

- (b) Wat worden de snelheden na een centrale elastische botsing, aangenomen dat er geen slip optreedt. (oplossing)

De totale energie van een rollende biljartbal is nu $(7/10)mv^2$. Gebruik makend van impuls en energiebehoud krijgen we

$$\begin{aligned} mv + 0 &= m v_1 + m v_2, \\ \frac{7}{10}mv^2 + 0 &= \frac{7}{10}m v_1^2 + \frac{7}{10}m v_2^2, \end{aligned}$$

Na wegdelen van factoren links en rechts, hebben we eenzelfde situatie als in de voorgaande opgave (onderdeel a) met als oplossing $v_1 = 0$ en $v_2 = v$.