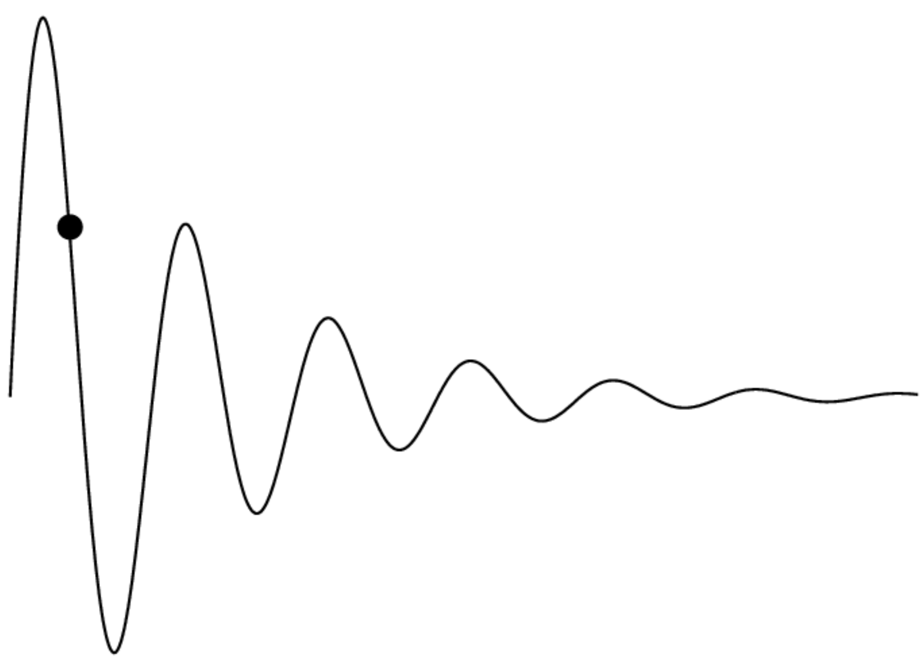
SYLLABUS

TRILLINGEN EN GOLVEN



Cursusjaar 2015 / 2016

Tom Hijmans, Ben van Linden van den Heuvell en Marcel Vreeswijk

Ik kan het niet helpen dat je doof bent voor het ultrageluid waarin ik spreek

W.F. Hermans

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

INTRODUCTIE

1.1 INLEIDING

Trillingen en Golven komen op heel veel gebieden binnen (en buiten!) de natuurkunde voor. Deze cursus bevat de basisbegrippen die een rol bij *Trillingen en Golven* spelen. In deze introductie wordt het belang van dit vak aangegeven door enige verbanden te leggen met gerelateerde onderwerpen (binnen de natuurkunde), en door aan te geven hoe de gebruikte methode (differentiaalvergelijkingen) algemeen toepasbaar is.

1.2 PLAATS VAN HET ONDERWERP

1.2.1 voorbeelden van trillingen en golven

Twee voorbeelden van *trillingen* zijn de beweging van een massa rond een evenwichtspositie, en die van elektrische lading in een spoel-condensator circuit. Deze twee voorbeelden zullen steeds terugkomen in deze syllabus. Daarnaast zijn belangrijke voorbeelden:

- **beweging binnen atomen**, in het bijzonder van gebonden elektronen;
- **beweging binnen moleculen**, in het bijzonder van gebonden atomen;
- **thermische bewegingen**, van deeltjes die het rooster van een vaste stof vormen;
- **beweging in antennes**, in het bijzonder van de vrije elektronen daarin.

De bekendste voorbeelden van *golven* zijn geluid en elektromagnetische straling; golven in water vormen ook een mooi voorbeeld.

elektromagnetische straling Elektromagnetische straling is een begrip dat, afhankelijk van de frequentie, weer vergaand uitgesplitst kan worden: wisselstroom, radiogolven, infrarood, zichtbaar licht, ultraviolet, röntgenstraling, gammastraling. Het is op het eerste gezicht moeilijk te geloven dat al deze golven slechts in frequentie van elkaar verschillen. In deze syllabus gebruiken we maar een beperkt aantal voorbeelden van elektromagnetische trillingen en golven; deze komen later in de studie nog uitgebreid aan bod.

geluid Geluidsgolven (dichtheidsgolven) hebben, in tegenstelling tot elektromagnetische straling, een medium nodig om zich voort te planten. Noodgedwongen hebben ze dus te maken met beperkingen in termen van materiaaleigenschappen van dat medium, en dus is hier een veel minder breed spectrum mogelijk dan bij licht. Dit betekent dat de verschijnselen minder rijk zijn, maar toch rijker dan je op het eerste gezicht zou verwachten. Rijker in gewaarwording: denk aan het mooie voorbeeld van muziek. Maar ook fysisch rijker: bijvoorbeeld in media met twee verschillende dichtheden die in elkaar kunnen overgaan, zoals superfluïde en gewoon helium. Er zijn dan allerlei combinaties van dichtheidsvariaties mogelijk, die zich allemaal verschillend voortplanten (en die helaas weinig spectaculaire namen hebben gekregen als tweede geluid, derde geluid ...). Door de materiaaleigenschappen hangt het golfgedrag van de frequentie af, en dat geeft aanleiding tot nieuwe begrippen zoals *dispersie* en *groepssnelheid*.

1.2.2 belang voor de quantummechanica

Er zijn twee, beide deels zeer succesvolle, klassieke beschrijvingen mogelijk van de wereld om ons heen: een beschrijving in termen van *deeltjes* en een beschrijving in termen van *golven*. Het plezierige van deze beschrijvingen is dat ze goed aansluiten bij onze eigen intuïtie, die gebaseerd is op een heel leven van dagelijks klassiek waarnemen. Met name de deeltjesbeschrijving komt (via de bekende wetten van Newton) meestal uitgebreid aan bod, terwijl de klassieke golven soms wat stiefmoederlijk bedeeld worden.

Het vervelende van deze klassieke beschrijvingen is dat ze niet altijd met de werkelijkheid overeenkomen, maar alleen als de zogenaamde *actie* voldoende groot is. Voor kleine actie (ter grootte van $\hbar$, de constante van Planck) is de quantummechanica nodig, die de deeltjes- en golfbeschrijving op verrassende en tegenintuïtieve wijze combineert.

Juist om de quantummechanica goed te begrijpen is het van belang om de klassieke beschrijving in termen van golven goed te beheersen. Het wordt dan makkelijker de karakteristieke "golf" fenomenen als zodanig te herkennen, en er intuïtie voor te ontwikkelen in bekende, "klassieke" termen. Bovendien blijkt dan dat concepten zoals *gekoppelde oscillatoren* en *groepssnelheid*) die wel eens een "quantummechanisch imago" toebedeeld krijgen, al binnen de klassieke natuurkunde veelvuldig voorkomen.

1.2.3 "trillingen" en "golven" in de cursus

De theoretische beschrijving in deze syllabus is opgedeeld in acht hoofdstukken, met aandacht voor zowel mechanische als elektrische aspecten.

De cursus begint in hoofdstuk 2 met een wiskundige inleiding waarin twee belangrijke stukken gereedschap kort worden samengevat: de Taylor expansie en het rekenen met complexe getallen. In alle volgende hoofdstukken spelen trillingen een rol. In hoofdstuk 3 wordt de trilling helemaal geïsoleerd van zijn omgeving bekeken. Hoe zo'n trilling ooit ontstaan kan zijn blijft dan noodgedwongen even buiten beeld. Maar daarna neemt de interactie met de buitenwereld stap voor stap toe, te beginnen met energieverlies door demping. In hoofdstuk 4 "ziet" de trilling een (heel eenvoudige) buitenwereld. Die buitenwereld kan dan energie leveren aan de trilling of juist energie eruit absorberen. In hoofdstuk 5 kan die buitenwereld omgekeerd ook de trilling "zien". Het begrip golf ontstaat vervolgens vrij natuurlijk wanneer een rij elkaar beïnvloedende oscillatoren wordt bekeken.

Hoofdstuk 6 vormt een intermezzo waarin wordt getoond hoe de sinus en cosinus functies, die we dan al veelvuldig zijn tegengekomen, heel algemeen gebruikt kunnen worden, namelijk om een willekeurige periodieke functie te beschrijven (de zogenaamde Fourieranalyse). Het begrip golf van hoofdstuk 5 wordt verder uitgewerkt in hoofdstuk 7, waarin we ons in eerste instantie beperken tot golven in één dimensie. De klassieke golfvergelijking wordt afgeleid, en de begrippen dispersie, groepssnelheid en golfpakket worden geïntroduceerd.

Het onderwerp *Optica* tenslotte, valt buiten deze syllabus. Voor dit onderwerp wordt gebruik gemaakt van de betreffende hoofdstukken uit Giancoli en, in het bijzonder, Hecht.

1.3 DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

1.3.1 een oplossingsstrategie

De cursus *Trillingen en Golven* is van belang in de natuurkundestudie, niet alleen omdat de geïntroduceerde begrippen zo centraal en universeel zijn, maar ook omdat de *oplossingsstrategie* zo universeel is en daarom keer op keer zal terugkomen. Dit laatste is geen speciale verworvenheid van deze cursus, maar is te danken aan het gebruik van het idee van *locale oorzaak en gevolg*. Het recept voor de oplossingsstrategie bestaat uit twee stappen:

- concretiseer een (eventueel nog wat vaag) probleem door het te formuleren in termen van een *differentiaalvergelijking*;
- los de vergelijking op, eventueel inclusief rand- en beginvoorwaarden.

De kracht van deze aanpak zit 'm onder andere in het feit dat een beperkt aantal differentiaalvergelijkingen steeds weer terugkomen, ook bij zeer verschillende situaties. Als je de differentiaalvergelijkingen en de bijbehorende oplossingen eenmaal kent, is het gedrag van het systeem waarop de vergelijkingen van toepassing zijn ook makkelijker te begrijpen. Of, zoals Richard Feynman zei: "The same equations have the same solutions."

Zoals algebraïsche vergelijkingen inperkingen op getallen zijn, zo zijn differentiaalvergelijkingen inperkingen op functies. Zo'n inperking bestaat er in de praktijk uit dat er een verband gegeven is tussen een vooralsnog onbekende functie en zijn afgeleiden. Maar zo'n inperking is nooit zo sterk dat je maar één functie overhoudt. Meestal zijn er hele families van functies die aan een bepaalde differentiaalvergelijking voldoen. De rand- en beginvoorwaarden perken de oplossing verder in van families van functies tot één unieke functie.

Het is min of meer toeval dat deze cursus de eerste in de studie is waarin differentiaalvergelijkingen zo'n belangrijke plaats innemen (het toeval wordt wat geholpen door het feit dat de differentiaalvergelijking die simpele harmonische trillingen beschrijft zo eenvoudig en relatief gemakkelijk oplosbaar is). Wat in eerste instantie nog een typische "*trillingen en golven* aanpak" lijkt zal later veel universeler blijken te zijn: de relevante fysica wordt beschreven met differentiaalvergelijkingen, de precieze details van de concrete situatie zitten in de rand- en beginvoorwaarden.

1.3.2 het oplossen van differentiaalvergelijkingen

Het oplossen van differentiaalvergelijkingen kan in principe op twee manieren: analytisch en numeriek.

analytisch Wie in algemene, universele oplossingen geïnteresseerd is, probeert analytische functies te vinden. Wie deze weg volgt, merkt al snel twee dingen. Ten eerste: het is vaak heel erg lastig om een algemene strategie te vinden om differentiaalvergelijkingen analytisch op te lossen. Ten tweede: het is daarentegen eenvoudig om te kijken of een vermeende oplossing (die op al dan niet obscure wijze is verkregen, bijvoorbeeld door gokken, slim proberen of uit een analogie met een al bekend geval) ook daadwerkelijk een oplossing is.

numeriek Wie slechts in een concrete, specifieke situatie geïnteresseerd is, lost de differentiaalvergelijking samen met rand- en beginvoorwaarden numeriek op, bij voorkeur met behulp van een computer, bijvoorbeeld met *Mathematica*. Soms is die beperking in interesse echt, soms gespeeld, en wordt het pad van de numerieke oplossing alleen maar gevolgd omdat het pad van de analytische oplossing te moeilijk begaanbaar is of misschien wel dood loopt.

1.4 REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

Het vak trillingen en golven leent zich bij uitstek voor het inzetten van een krachtig stuk wiskundig gereedschap; het rekenen met complexe getallen. In de loop van de cursus zal duidelijk worden dat het gebruik van de complexe rekenwijze bij het beschrijven van periodieke verschijsenlen een grote vereenvoudiging van het rekenwerk met zich meebrengt. Om deze reden beginnen we dan ook direct in het volgende hoofdstuk met een korte opfrisser van de basisbegrippen uit de complexe rekenwijze.

1.5 CONCLUSIE

Het is heel rendabel om energie in de cursus *Trillingen en Golven* te investeren. Dat komt doordat het voor heel veel andere vakken nuttig is om een goed begrip te hebben van

- het onderwerp *trillingen en golven* zelf en zijn plaats in de natuurkunde;

- de oplossingsstrategie (het probleem herleiden tot een *differentiaalvergelijking* en deze vervolgens oplossen).

- de toepassing van complexe getallen bij bij het beschrijven van verschijnselen die periodiek zijn in de tijd en/of de plaats.

Dit alles geldt het allersterkst in relatie tot het vak *Quantumfysica*: als de opstellers van het curriculum wat publiciteitsbewuster waren geweest, zouden ze de cursus *Trillingen en Golven* wellicht "voorbereiding quantumfysica" genoemd hebben.

1.6 AANBEVOLEN LITERATUUR

- D.C. Giancoli, *Physics for Scientists and Engeneers, fourth edition*, Pearson international 2009, hoofdstuk 14, 15, 16 en delen van hoofdstuk 30 t/m 35. Soms zal in deze syllabus en het daarbij horende werkboek worden terugverwezen naar Giancoli en de daarin opgenomen opgaven.

  Het boek van Giancoli gaat op een niet al te diep in. Complexe getallen ontbreken b.v. volledig.

  Het onderwerp Optica van dit college wordt wel volledig uit Giancoli gedaan.

- E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley Longman, 2002.

- G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics, Seventh Edition*, Thomson Brooks Cole, 2005, hoofdstuk 3 en 11, en appendix G.

- F. S. Crawford jr., *Waves*, Berkeley Physics Course Vol. 3, McGraw-Hill Book Company 1968, hoofdstuk 1-7.

- R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. L. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley 1989, Vol. I, hoofdstuk 21, 23–25, 29–31, 47–51.

Hoofdstuk 2

WISKUNDIG GEREEDSCHAP

Hoewel de wiskundige voorkennis voor dit vak grotendeels bij Calculus aan de orde is gekomen willen we er twee elementen uit lichten die speciaal van belang zijn voor dit vak. Dit zijn de Taylor-ontwikkeling en het gebruik van complexe getallen.

2.1 TAYLOR-REEKSEN

De Taylor-reeks of Taylor-ontwikkeling van een functie is een stuk wiskundig basisgereedschap dat in ongeveer alle takken van de natuurkunde veelvuldig wordt gebruikt. Zo ook in *Trillingen en Golven*. Dit onderwerp is in principe bekend uit de calculuscolleges maar voor de volledigheid volgt hier een korte, wiskundig niet al te rigoureuze, opfrisser.

De stelling van Taylor zegt dat voor elke functie $f(x)$ die continu en differentieerbaar is op het interval $[a, b]$ geldt:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) + ... \tag{2.1}$$

Hier is $f'(a)$ de afgeleide van de functie $f(x)$ naar x, uitgerekend voor de waarde $x = a$, $f''(a)$ is de tweede afgeleide in dat punt enz.

De functie is voor elke waarde van x binnen het interval waar de functie continu/differentieerbaar is, exact gelijk aan zijn Taylor-reeks. Dit betekent in feite dat als de functie (en zijn afgeleiden) in één punt bekend is, dan ken je de functie overal. In de praktijk is dit gegeven niet zo heel interresant want niemand wil (of kan) oneindig veel termen uitrekenen. De lol van de Taylor-ontwikkeling is het feit dat voor veel functies de reeks snel convergeert wanneer b dicht bij a ligt zodat een klein aantal termen voldoende is voor een goede benadering van de functie. Niet onbelangrijk, de Taylor-ontwikkeling geldt ook voor het geval dat a en b complexe getallen zijn.

Laten we een voor *Trillingen en Golven* belangrijk voorbeeld bekijken. Beschouw de functie $f(\theta) = \sin(\theta)$. Tot op derde orde is de Taylor-ontwikkeling van deze functie rond het punt $\theta = 0$ gegeven door:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &\approx 0 + \theta\cos(0) - \frac{1}{2}\theta^2\sin(0) - \frac{1}{6}\theta^3\cos(0) \\ &= \theta - \frac{1}{6}\theta^3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Het is duidelijk dat voor voldoende kleine waarde van θ de derde-orde term veel kleiner is dan de eerste orde. De hier niet meegenomen hogere orde termen zijn nog kleinere correcties.

2.2 COMPLEXE GETALLEN

Het gebruik van complexe getallen is voor veel onderwerpen binnen de natuurkunde een belangrijk stuk wiskundig gereedschap. Complexe getallen zijn van groot belang voor het beschrijven van trillingen en golven. Hoewel complexe getallen al behandeld zijn bij Calculus volgt hier voor de volledigheid een bekopte samenvatting van de belangrijkste begrippen uit de complexe rekenwijze.

Een complex getal z wordt geschreven als

$$z = x + iy, \tag{2.3}$$

waarbij x en y reële getallen zijn en i is gedefinieerd via $i^2 = (-i)^2 = -1$. x heet het reële deel van z, notatie: Re(z) en y het imaginaire deel: $y \equiv$ Im(z).

Het complexe getal kan worden weergegeven als een punt in het x-y-vlak, dat in dit verband het complexe vlak wordt genoemd. De x- en y-assen heten dan de reële en imaginaire as.

Uitdrukking (2.3) kan worden herschreven als:

$$z = A(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{2.4}$$

waar A en ϕ reël zijn. $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ heet de modulus van z en $\phi = \arctan\frac{y}{x}$ het argument. De modulus wordt ook wel de absolute waarde genoemd en genoteerd als $|z|$. Als je het getal weergeeft als een vector in het complexe vlak dan is $A = |z|$ de lengte van de vector (dus de afstand tot de oorsprong) en ϕ de hoek met de reële as. We kunnen uitdrukking (2.4) nogmaals herschrijven op de volgende manier:

$$z = Ae^{i\phi}. \tag{2.5}$$

Je kunt je afvragen of vergelijkling (2.5) gezien moet worden als de definitie van de complexe e-macht die je voor zoete koek moet slikken of dat je de equivalentie van (2.4) en (2.5) ook kunt afleiden. Dat laatste blijkt het geval. Het makkelijkst gaat dit door de Taylor-ontwikkeling van de e-macht te vergelijken met de Taylor-ontwikkeling van de sinus en de cosinus. De even termen in de Taylor-reeks van $e^{i\phi}$ vallen term voor term samen met die van de reeks voor $\cos\phi$ en de oneven termen zijn gelijk aan die van de ontwikkeling van $i\sin\phi$.

Formule (2.5) is het belangrijkste resultaat van dit hoofdstuk. Uit de gewone rekenregels voor e-machten (die ook gelden voor complexe getallen) volgt meteen dat bij het vermenigvuldigen van twee complexe getallen de Moduli vermenigvuldigd moeten worden en de argumenten opgeteld:

$$Ae^{i\phi}Be^{i\theta} = ABe^{i(\phi+\theta)}. \tag{2.6}$$

Een andere zeer nuttige eigenschap is dat een exponentiële functie evenredig is met zowel zijn eerste als zijn tweede afgeleide. Het succes van het gebruik van complexe getallen in de context van T&G hangt in hoge mate samen met deze eigenschap zoals in de loop van de cursus duidelijk zal worden.

Een handige formule is de omkering van de gelijkheid $\exp(i\phi) = \cos\phi + i\sin\phi$:

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \tag{2.7}$$

$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \tag{2.8}$$

Tot slot nog een belangrijk begrip. Bij elk complex getal $z = a + ib$ is er een getal $z^* = a - ib$. Dit getal heet de complex-gejonjugeerde van z. Als $z = Ae^{i\phi}$ dan is z^* gelijk aan $Ae^{-i\phi}$. Tevens geldt:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{2.9}$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{2.10}$$

$$zz^* = |z|^2. \tag{2.11}$$

Om alles wat concreter te maken volgt hier een voorbeeld van een toepassing. Gebruik complexe getallen om te bewijzen dat:

$$\sin(3\phi) = 3\sin\phi\cos^2\phi - \sin^3\phi \tag{2.12}$$

Er geldt dat $\sin(3\phi) = \mathrm{Im}\, e^{3i\phi} = \mathrm{Im}(\cos\phi + i\sin\phi)^3$.
$(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos^3\phi + 3i\sin\phi\cos^2\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi$. Nemen van het imaginaire deel van deze uitdrukking leidt meteen tot het gewenste resultaat.

toepassing in trillingen en golven Het zal in de loop van de cursus steeds duidelijker worden waarom het gebruik van complexe getallen handig is. Om deze wiskundige inleiding iets concreter te maken besluiten we hier met een relevant voorbeeld.

We bekijken de periodieke beweging van een massa gegeven door:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{2.13}$$

De positie X van de massa is duidelijk reëel. We kunnen de door (2.13) beschreven uitwijking ook beschouwen als het reële deel van de volgende complexe uitdrukking:

$$\widetilde{x}(t) = A\exp(i\omega t) \tag{2.14}$$

Om het verschil tussen de werkelijke (reële) plaatscoordinaat en de uitbereiding naar het complexe vlak duidelijk te maken hebben we de tweede hier aangegeven met met een slangetje boven de letter. In latere hoofdstukken zullen we deze notatie voor de eenvoud laten vallen. Vaak wordt uit de context dan wel duidelijk of er een reële of complexe grootheid wordt bedoeld. We kunnen nu ook de snelheid van de massa bekijken, dat is de afgeleide van (2.13):

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t) \tag{2.15}$$

Op zijn beurt kunnen we (2.15) weer zien als het reële deel van de afgeleide van (2.14) d.w.z.

$$\widetilde{v}(t) = iA\omega \exp(i\omega t) = A\omega \exp(i\omega t + i\frac{\pi}{2}) = A\omega \exp(i\omega t) \exp(i\frac{\pi}{2}) \tag{2.16}$$

Wat is het voordeel van deze, op het eerste gezicht overbodige en nodeloos ingewikkelde, manipulatie met complexe getallen? Stel we zijn geinterresseerd in een grootheid die zowel van de plaats als de snelheid afhangt, beschouw b.v. de som $S(t) = x(t) + Cv(t)$. De constante C heeft uiteraard de dimensie van tijd. We vullen, bij wijze van uitzondering, wat getallen in: we kiezen voor het gemak $A = 1$ m en $C = 1$ s. De som wordt dan

$$S = \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t). \tag{2.17}$$

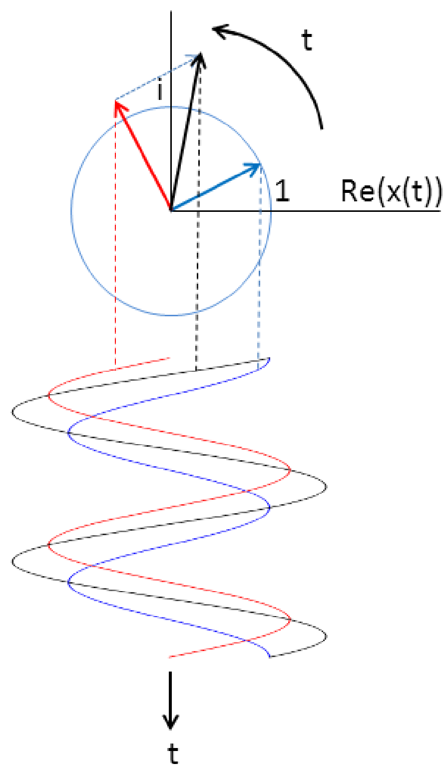
Dit willen we schrijven als één periodieke functie dus b.v. als

$$S = B \cos(\omega t + \phi). \tag{2.18}$$

Om de constanten B en ϕ te bepalen moeten we flink wat gonio-kennis in stelling brengen. Het gaat makkelijker als we de som eerst uitrekenen met de comlexe grootheden: $\widetilde{S} = \exp(i\omega t) + i\omega \exp(i\omega t)$. Het reële deel van deze uitdrukking is (2.17). Met de boven gegeven rekenregels kunnen ook schrijven $\widetilde{S} = (1 + \omega^2)^{1/2} \exp(i[\omega t + \arctan(\omega)])$. Na het nemen van het reële deel van deze uitdrukking zien we meteen dat in (2.18) we moeten nemen: $B = \sqrt{1 + \omega^2}$ en $\phi = \arctan(\omega)$. Probeer dit resultaat maar eens af te leiden zonder gebruik te maken van complexe getallen. Succes! In figuur 3.1 is een en ander samengevat in een z.g. fasordiagram.

We besluiten dit hoofdstuk met een kleine waarschuwing. Veel mensen die beginnen met het rekenen met complexe getallen maken in berekeningen de fout om aan te nemen dat het reële (of imaginaire) deel van het product van twee complexe getallen gelijk is aan het product van hun reële (of imaginaire) delen. Dit is niet het geval. Bekijk b.v. het product van i met zichzelf. Het reële deel van i is overduidelijk nul maar het reële deel van i^2 is dat niet, dat is namelijk gelijk aan -1.

Figuur 2.1: fasordiagram met de positie (blauw) en de snelheid (rood) weergegeven als vectoren in het complexe vlak. De vectorsom van de twee is zwart weergegeven. De vectoren draaien rond met hoeksnelheid ω. De werkelijke positie en snelheid en hun som, zijn gegeven door de(tijdsafhankelijke) projecties op de reële as.



Hoofdstuk 3

VRIJE TRILLINGEN

3.1 INLEIDING

Veel fysische systemen, van groot tot klein, mechanisch en elektrisch, kunnen trillingen uitvoeren. Daarom is in de natuurkunde het bestuderen van trillingen van groot belang (zie ook Giancoli ch14-16). Als de systemen de trillingen zelfstandig, zonder aandrijving van buitenaf, uitvoeren spreken we van *vrije* trillingen.

We beginnen met de invoering van het begrip *harmonische oscillator*. Dit is een verzamelnaam voor eenvoudige fysische modelsystemen die de twee essentiële eigenschappen (*traagheid* en *stijfheid*) bevatten die voor harmonische trillingen nodig zijn. We geven enkele voorbeelden van modelsystemen die het gedrag van de harmonische oscillator vertonen.

Vervolgens kijken we ook naar een paar modelsystemen waarin afwijkingen van dit gedrag optreden.

3.2 HARMONISCHE OSCILLATOREN

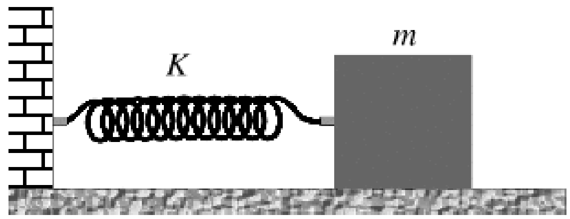
3.2.1 het massa-veersysteem

Stel een veer met veerconstante K zit met één uiteinde vast aan een muur, en met het andere uiteinde aan een blok met massa m dat op een gladde vloer ligt (figuur 3.1). Stel ook dat de veer steeds in de x-richting loodrecht op de muur wijst. Als de veer niet is uitgerekt of ingedrukt bevindt het blok zich in de evenwichtsstand $x = 0$. We weten uit ervaring dat elke vrije beweging van het systeem van veer plus blok een trilling om de evenwichtsstand moet zijn.

- Wat betekent het dat de veer een veerconstante K heeft?

- Beredeneer zonder iets uit te rekenen wat er gebeurt als we het systeem een uitwijking geven.

Figuur 3.1:



We maken van dit systeem een modelsysteem door aan te nemen dat K en m de enige grootheden zijn die er in voorkomen. Dus we maken een idealisatie waarin het blok geen afmetingen heeft, de veer geen demping vertoont, de vloer volkomen glad is, enzovoort. We noemen dit fysische modelsysteem het massa-veersysteem. Het massa-veersysteem heeft de eigenschappen van een harmonische oscillator.

wiskundige beschrijving De *bewegingsvergelijking* beschrijft hoe dit eenvoudige mechanische systeem zich gedraagt als functie van de tijd. Dit is niets anders dan de tweede wet van Newton:

$$F = ma \tag{3.1}$$

- Wat stellen F en a in de tweede wet van Newton voor?

We nemen aan dat het systeem *vrij* is. Hiermee bedoelen we dat er geen uitwendige krachten aanwezig zijn, zodat de tot het systeem behorende veerkracht de enige werkzame kracht is. Er geldt dus bij een uitwijking x:

$$F = -Kx \tag{3.2}$$

Het minteken geeft aan dat de veerkracht een *terugdrijvende kracht* is.

Combinatie van (3.1) en (3.2) leidt tot de bewegingsvergelijking

$$ma + Kx = 0 \tag{3.3}$$

Vergelijking (3.3) is een *lineaire differentiaalvergelijking* van de vorm

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \tag{3.4}$$

waarin t de tijd voorstelt. We hebben hier gebruikt dat $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Het is niet expliciet aangegeven maar het is duidelijk dat x een functie is van de tijd. We zouden dus egenlijk moeten schrijven $x(t)$. Zoals we direct zullen zien is het handig om (3.4) te schrijven als

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \tag{3.5}$$

waarin dus als notatie is gebruikt:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \tag{3.6}$$

Vergelijking (3.5) wordt de *differentiaalvergelijking van de vrije harmonische oscillator* genoemd.

De oplossingen van (3.5) zijn functies van de gedaante

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \tag{3.7}$$

Deze zijn ook te schrijven als

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta)} \tag{3.8}$$

We kunnen deze uitdrukking ook weekgeven in complexe notatie:

$$\boxed{x(t) = A\exp(i[\omega_0 t - \beta])} \tag{3.9}$$

waarbij $x(t)$ nu een complexe grootheid voorstelt. (3.8) is eenvoudig het reële deel van(3.9).

De oplossingen (3.7),(3.8) of (3.9) heten *harmonische trillingen* met *hoekfrequentie* ω_0. In (3.8) en (3.9) heet A de *amplitude* en $\omega_0 t - \beta$ de *fasehoek*.

- Ga na dat (3.7), (3.8)en (3.9) alle voldoen aan (3.5).

Het verband tussen ω_0, de *frequentie* f_0 en de *periode* T_0 van de trillingen wordt gegeven door

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{3.10}$$

De SI-eenheid voor ω_0 is rad/s, oftewel s^{-1} aangezien de hoekeenheid “radiaal” dimensieloos is. De benaming Hertz, Hz $= \mathrm{s}^{-1}$ gebruiken we alleen voor de SI-eenheid van de frequentie f_0. Om verwarring over factoren 2π te voorkomen is het verstandig bij waardes van hoekfrequenties ω altijd de eenheid als rad/s te vermelden, en bij gewone frequenties f de eenheid Hz te gebruiken. Een veelgebruikte schrijfwijze om de mogelijke verwarring de kop in te drukken is: $\omega = 2\pi \times 50$ Hz (waarbij de getalswaarde natuurlijk maar een voorbeeld is).

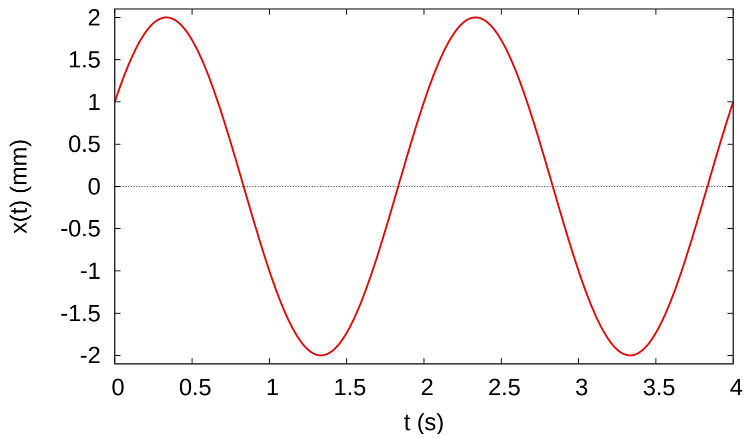
- Ga door invullen van (3.10) en (3.8) in (3.9) na dat T_0 in (3.10) inderdaad de periode voorstelt.

systeemgrootheden en begincondities De systeemgrootheden K (veerconstante) en m (massa) beschrijven respectievelijk de *stijfheid* en de *traagheid* van het massaveersysteem.

De hoekfrequentie ω_0 wordt volgens (3.6) door deze systeemgrootheden vastgelegd. Ook de periode T_0 hangt dus uitsluitend van de systeemgrootheden af.

- Druk T_0 uit in K en m.

Figuur 3.2:



Naast ω_0 bevatten de oplossingen nog de parameters a en b in (3.7), dan wel A en β in (3.8). Deze parameters worden niet door de systeemgrootheden bepaald, maar door de toevallige *begincondities*: zij zijn bijvoorbeeld uit te drukken in de uitwijking $x(0)$ en de snelheid $v(0)$ op het tijdstip $t = 0$. Er geldt:

$$a = A\cos\beta = x(0) \tag{3.11a}$$

$$b = A\sin\beta = \frac{v(0)}{\omega_0} \tag{3.11b}$$

- Controleer (3.11a) en (3.11b).

In figuur 3.2 is (3.8) grafisch uitgezet.

- Ga na welke waarden hier gekozen zijn voor ω_0, A en β. Bepaal ook a en b.

energiebeschouwing Eerst een intermezzo over energie in een mechanisch systeem (zie ook Giancoli ch 8); het startpunt is de geleverde arbeid W door een kracht F. Als een voorwerp waarop F werkt een trajekt $x(t)$ van x_1 naar x_2 aflegt dan wordt de arbeid gegeven door:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \tag{3.12}$$

In veel gevallen (we laten de precieze voorwaarden hier achterwege, en vermelden slechts dat een eis is dat de kracht slechts van de plaats afhangt, en dus niet van de tijd) kunnen we een potentiële energie $E_p(x)$ definiëren, zo dat

$$F = -\frac{dE_p(x)}{dx} \tag{3.13}$$

Een kracht die door (3.13) kan worden beschreven heet *conservatief*. Als dat het geval is geldt door invullen van (3.13) in (3.12):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{dE_p(x)}{dx} dx = E_p(x_1) - E_p(x_2) \tag{3.14}$$

Met andere woorden: de door de kracht geleverde arbeid is gelijk aan het afname (het min teken in (3.13)) van potentiële energie $E_p(x)$ van x_1 naar x_2.

Door de tweede wet van Newton in te vullen kunnen we ook meteen laten zien dat de aan een voorwerp geleverde arbeid gaat naar een toename in kinetische energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} m\,adx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dx}{dt}dv = \int_{x_1}^{x_2} mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{3.15}$$

Wanneer we dit concreet maken voor de harmonische oscillator, krijgen we door integreren van 3.13:

$$E_p(x) = E_p(0) - \int_0^x F(x_i)dx_i = \int_0^x Kx_idx_i = \frac{1}{2}Kx^2, \tag{3.16}$$

waarbij we voor het gemak $E_p(0)$, de potentiële energie bij $x = 0$, gelijk aan nul genomen hebben. Nu zijn we klaar om de totale energie uit te rekenen.

De totale energie E van het massa-veersysteem is de som van de kinetische energie E_k en de potentiële energie E_p:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{3.17}$$

waarbij E_k en E_p met behulp van (3.6), (3.8) en $v = \frac{dx}{dt}$ worden gegeven door

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0t - \beta) = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega_0t - \beta) \tag{3.18a}$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega_0t - \beta) = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\cos^2(\omega_0t - \beta) \tag{3.18b}$$

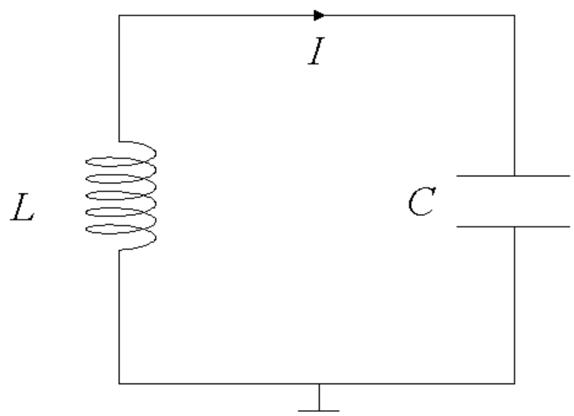
Uit invullen van (3.18a) en (3.18b) in (3.17) blijkt dat E niet van t afhangt:

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}KA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2} \tag{3.19}$$

De som van de kinetische energie en de potentiële energie van het massa-veersysteem is dus constant in de tijd.

- Gebruik de substituties $\sin^2\alpha \equiv \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ en $\cos^2\alpha \equiv \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ om na te gaan dat E_k en E_p elk afzonderlijk periodieke functies van de tijd zijn met periode $\frac{1}{2}T_0$.

Figuur 3.3:



3.2.2 de LC-kring

Het elektrische analogon van het massa-veersysteem is een LC kring, een elektrisch circuit met een spoel met zelfinductie L en een condensator met capaciteit C. De exacte definities van capaciteit en zelfinductie komen aan de orde in het vak *Elektriciteit en Magnetisme*. Voorlopig volstaat het om te weten dat een condensator een electrisch circuitelement is dat lading kan opslaan. De spanning over de condensator is gegeven door $V_c = q/C$ waar q de lading op de condensator voorstelt en C de capaciteit van de condensator is. De spanning V_L over een (ideale) spoel is evenredig met de verandering van de stroom. Als je de spoel als *spanningsbron* beschouwd geldt: $V_L = -L\frac{dI}{dt}$. Hier heet L de zelfinductie van de spoel. De spanning die de spoel genereert werkt dus de bronspanning tegen. In electrische circuits is het echter gebruikelijk om de spoel als *belasting* te beschouwen, net als een weerstand. In dit geval geldt dat de spanning aan de kant waar de stoom ingaat gegeven is door $V_L = +L\frac{dI}{dt}$ (gemeten ten van de spanning aan de kant waar de stroom de spoel verlaat). We zullen deze laatste definitie verder gebruiken. In (figuur 3.3), is een ideale LC-kring afgebeeld.

In de *vrije* LC-kring (er is geen uitwendige spanning aanwezig) moet volgens de wet van Kirchhoff de spanning over de spoel gelijk zijn aan die over de condensator, zodat

$$-\ L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} \tag{3.20}$$

waarin de stroom I door de spoel en de lading q op de condensator samenhangen volgens

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{3.21}$$

Differentiëren van (3.21) en invullen in (3.20) leidt tot de differentiaalvergelijking voor de LC-kring:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \tag{3.22}$$

analogie met massa-veersysteem Het valt op dat de vergelijkingen (3.4) en (3.22) dezelfde wiskundige gedaante hebben. Ook (3.22) is dus te schrijven op de manier van (3.5):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \tag{3.23}$$

met als oplossingen de harmonische trillingen

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \tag{3.24}$$

waarin de hoekfrequentie ω_0 nu bepaald wordt door

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \tag{3.25}$$

We kunnen ook hier weer de oplossing (3.24) schrijven met behulp van complexe notatie:

$$q(t) = A\exp(i[\omega_0 t - \beta]), \tag{3.26}$$

waar we voor de eenvoud het zelfde symbool gebruiken voor de echte (reële) lading als voor de complexe generalisatie.

De LC-kring is dus een harmonische oscillator. Het gedrag in de tijd wordt hier beschreven uitgaande van de wet van Kirchhoff in de vorm van (3.20). De rol van de uitwijking x wordt overgenomen door de lading q, die van de snelheid v door de stroom I.

- Geef aan welke systeemgrootheden in de LC-kring de rol van m (traagheid), respectievelijk die van K (stijfheid) overnemen.

- Leg uit dat $I(t)$, net als $q(t)$, periodiek varieert met hoekfrequentie ω_0 en dus voldoet aan (3.27):

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0 \tag{3.27}$$

De totale energie E van de LC kring is

$$E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \tag{3.28}$$

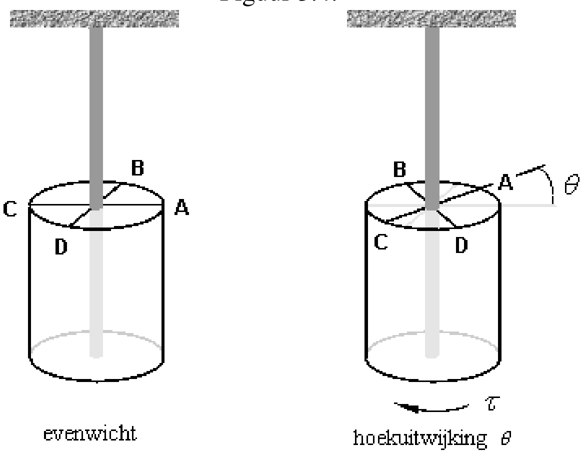
- Laat zien dat ook hier E constant is in de tijd.

3.2.3 torsietrillingen

Stel een cilinder met traagheidsmoment J hangt aan een draad (figuur 3.4). Als de cilinder over zekere hoek θ gedraaid wordt oefent de draad een terugdrijvend krachtmoment τ uit dat evenredig is met θ:

$$\tau = -\kappa\theta \tag{3.29}$$

Figuur 3.4:



(κ heet de *torsieconstante*). Hierdoor ontstaat bij loslaten een *torsietrilling* met differentiaalvergelijking

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0 \tag{3.30}$$

De oplossingen hebben opnieuw de vorm van harmonische trillingen:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \tag{3.31}$$

waarin

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{J} \tag{3.32}$$

- Geef een formule voor de periode van de torsietrilling. Klopt de dimensie?

3.3 AFWIJKINGEN VAN HARMONISCH GEDRAG

Er zijn veel fysische systemen, alle gekenmerkt door een traagheid en een stijfheid, die zich in sterke mate gedragen als een harmonische oscillator. We noemen echter twee voorbeelden van afwijkingen:

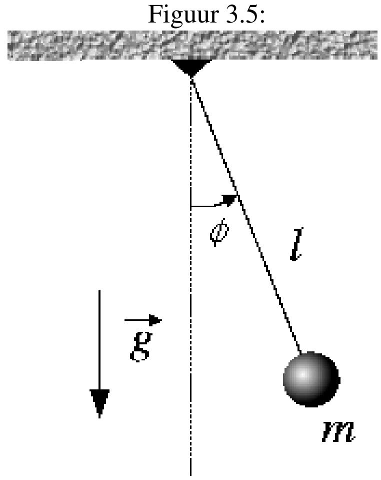
Bij grotere uitwijkingen kan, zoals bij een *slinger*, het harmonisch gedrag verloren gaan doordat de terugdrijvende kracht niet evenredig is met de uitwijking (de gevolgen kunnen zeer ingrijpend zijn).

Bij elk *gedempt* systeem gaat het harmonisch gedrag verloren doordat er behalve een traagheidsgrootheid en een stijfheidsgrootheid ook een *dempings*grootheid aanwezig is.

3.3.1 de slinger

We bekijken een *slinger* als voorbeeld van een *niet-lineair systeem*: bij grote uitwijkingen zal duidelijk blijken dat de beweging geen harmonische trilling is (zie ook Giancoli

Figuur 3.5:



14.5).

De ééndimensionale slinger in figuur 3.5 bestaat uit een massaloze staaf waaraan een massa m zit die bij een hoekuitwijking ϕ, uitgaande van de evenwichtsstand, langs een cirkelboog een afstand $l\phi$ heeft afgelegd. De terugdrijvende kracht is de tangentiële component $-mg\sin\phi$ van de zwaartekracht op m; de tangentiële versnelling is $l\frac{d^2\phi}{dt^2}$. De vergelijking voor de beweging langs de cirkelboog wordt dus de *niet-lineaire differentiaalvergelijking*

$$ml\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\sin\phi \tag{3.33}$$

Als we $\sin\phi$ ontwikkelen in een Taylorreeks (zie hoofdstuk 2) volgt uit (3.33), onafhankelijk van m:

$$l\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\cdot(\phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{120}\phi^5 + O(\phi^7)) \tag{3.34}$$

Alleen voor voldoend kleine ϕ mogen we de hogere orde-termen verwaarlozen. Dan ontstaat als benadering toch weer een lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega_0^2\phi \tag{3.35}$$

waarin

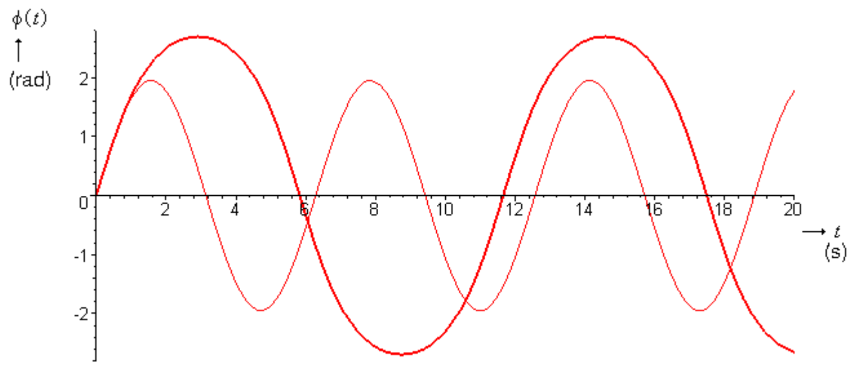
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \tag{3.36}$$

Voor grotere ϕ moeten we echter uitgaan van de niet-lineaire vergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega_0^2\sin\phi \tag{3.37}$$

(met daarin dezelfde ω_0) die we het beste numeriek kunnen oplossen.

Figuur 3.6:



- Verwacht je als oplossing van (3.37) een harmonische beweging? Een periodieke beweging? Met een hoekfrequentie groter, gelijk aan of kleiner dan ω_0?

We zetten als voorbeeld in figuur 3.6 een oplossing van (3.37) uit waarbij de slinger een flinke zet krijgt en ongeveer 155° uitslaat (gekozen is $\omega_0 = 1$). De grafiek hiervan is géén sinuslijn. Ter vergelijking is (dunne lijn) de oplossing van (3.35) weergegeven met dezelfde begincondities.

3.4 demping

Een systeem met een traagheid, een stijfheid én een demping noemen we een *gedempte harmonische osillator*, zie ook Giancoli 14.7.

We zullen hieronder zowel voor het massa-veersysteem als voor de LC-kring nagaan hoe het gedrag verandert als er een dempingsgrootheid wordt toegevoegd.

mechanisch systeem

- Een opstelling bestaand uit een massa m, hangend aan een veer met veerconstante K, wordt in zijn geheel in een vloeistof gedompeld. Probeer zonder iets uit te rekenen het gedrag te voorspellen, 1) voor grote waarden van m en K; 2) voor kleine waarden van m en K.

Om de bewegingsvergelijking van het massa-veersysteem te krijgen vulden we in de tweede wet van Newton voor de totale kracht F de terugdrijvende kracht $-Kx$ van het systeem in. Echter, in de praktijk zal de vrije beweging van een massa aan een veer door wrijving ook demping vertonen.

Om dit te beschrijven breiden we het modelsysteem uit met een dempingskracht, waarvan we eenvoudigheidshalve veronderstellen dat hij evenredig is met de snelheid, en tegengesteld daaraan. Dus: $F = -\lambda v$. Terzijde: deze kracht is niet te schrijven als de afgeleide van een plaatsafhankelijke potentiële energie, en dus *niet conservatief*. We nemen weer aan dat het systeem vrij is: we nemen aan dat er geen uitwendige krachten zijn.

In plaats van (3.2) krijgen we dan voor de totale kracht bij een uitwijking x en een snelheid v:

$$F = -\lambda v - Kx \tag{3.38}$$

en in plaats van (3.3) voor de bewegingsvergelijking:

$$ma + \lambda v + Kx = 0 \tag{3.39}$$

De nieuw optredende systeemgrootheid λ heet de *dempingsconstante*.

We kunnen het gedrag van het vrije systeem berekenen door (3.39) op te vatten als een lineaire differentiaalvergelijking:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \tag{3.40}$$

We nemen aan dat de dempingskracht ook nog evenredig is met m, zodat we mogen stellen dat

$$\lambda = 2m\gamma \tag{3.41}$$

(we zullen γ het dempingsgetal noemen). Dan kunnen we (3.40) met behulp van (3.6) ook schrijven in de vorm

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \tag{3.42}$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de *vrije gedempte harmonische oscillator*.

- Geef de SI-eenheden waarin λ en γ moeten worden uitgedrukt.

We zoeken de algemene oplossing van van (3.42). We zullen dit doen met behulp van de complexe notatie. Verder doen we een z.g. *slimme gok* (Eng: *educated guess*): we nemen aan dat de oplossing van de volgende vorm is:

$$x(t) = c\, e^{(i\omega t - \sigma t)}. \tag{3.43}$$

De gok die we hebben gemaakt bij het opschrijven van (3.43) komt niet uit de lucht vallen: de vergelijking beschrijft een oscillerende functie met een amplitude die exponentieel in de tijd afneemt. Er zijn drie onbekende constanten: c, ω en σ die we later zullen bepalen. De oplossingsstrategie is nu als volgt. In de differentiaalvergelijking staan behalve x ook zijn eerste en tweede afgeleiden (de snelheid en de versnelling). Deze worden gegeven door:

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(i\omega - \sigma)e^{(i\omega t - \sigma t)} \tag{3.44a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= c(i\omega - \sigma)^2 e^{(i\omega t - \sigma t)} \\ &= c(\sigma^2 - \omega^2 - 2i\omega\sigma)e^{(i\omega t - \sigma t)} \end{aligned} \tag{3.44b}$$

We vullen nu (3.43), (3.44a) en (3.44b) in, in de linkerkant van de differentiaalvergelijking (3.42) en we eisen dat deze resulterende uitdrukking voor elk tijdstip nul oplevert. Het resultaat is:

$$(-\omega^2 + \sigma^2 - 2i\omega\sigma + 2i\omega\gamma - 2\gamma\sigma + \omega_0^2)c\, e^{(i\omega t - \sigma t)} = 0. \tag{3.45}$$

Het linkerlid van deze uitdrukking is uiteraard nul als de constante c nul is maar dat levert geen erg interessante oplossing op, het beschrijft een deeltje in rust. Voor $c \neq 0$ moet de term tussen haakjes gelijk zijn aan nul. Dit betekent dat zowel het reële als het imaginaire deel van die term nul zijn. Hieruit volgt meteen dat $\sigma = \gamma$ en $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. We onderscheiden nu drie gevallen: $\omega_0 > \gamma$, $\omega_0 < \gamma$ en $\omega_0 = \gamma$. We bekijken eerst naar het geval $\omega_0 > \gamma$.

zwakke demping We spreken van *zwakke demping* als het (positieve) dempingsgetal γ voldoet aan

$$\gamma < \omega_0 \tag{3.46}$$

Dit houdt in dat $\omega = \pm\omega_1$ met ω_1 gegeven door:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{3.47}$$

De oplossing wordt nu volgens (3.43):

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t} \cdot (c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t})} \tag{3.48}$$

waarbij c_1 en c_2 willekeurige constanten zijn. De echte plaatscoordinaat is reëel. Het reële deel van (3.48) is gelijkwaardig met

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot (a \cos\omega_1 t + b \sin\omega_1 t) \tag{3.49}$$

ofwel

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega_1 t - \beta)} \tag{3.50}$$

Dit resultaat, dat dus optreedt bij zwakke demping, stelt een *vrije gedempte trilling* voor.

Bij gegeven ω_0 hangt het af van de grootte van γ hoe deze oplossing zich gedraagt.

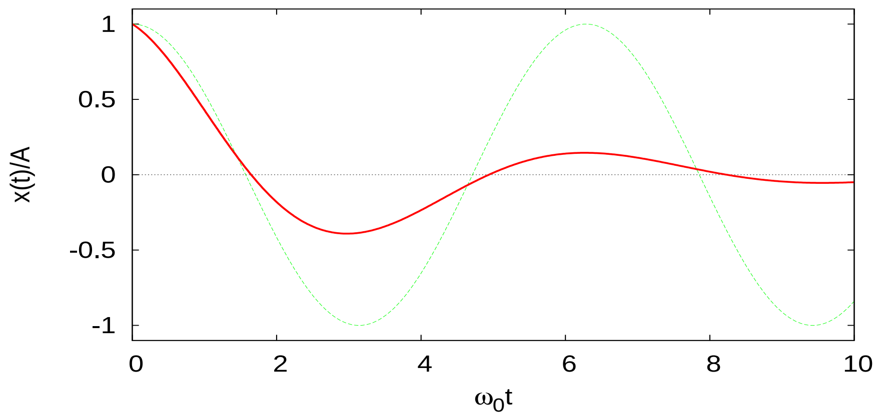
We vergelijken (3.50) met de oplossing (3.8) voor de ongedempte harmonische oscillator. We zien in de eerste plaats dat er in (3.50) een extra *dempingsfactor* $e^{-\gamma t}$ in de amplitude voorkomt, zodat de trilling uitsterft. Bovendien is de *eigenhoekfrequentie* ω_0 van de *ongedempte* oscillator vervangen door de kleinere hoekfrequentie $\omega_1$uit (3.47).

- Gebruik de rekenregels voor complexe getallen uit hoofdstuk 2 om de getallen a en b uit (3.49) uit te drukken in c_1 en c_2 uit (3.48).

In figuur 3.7 is (3.50) uitgezet voor $\gamma = 0.3\omega_0$, met $\beta = 0$. Ter vergelijking is ook (dunne lijn) de trilling voor $\gamma = 0$ weergegeven.

- Bekijk voor beide grafieken de ligging van de nulpunten en geef je commentaar. Wat verwacht je te zien als $\gamma = \omega_0$?

Figuur 3.7:



energiebeschouwing Ook voor het zwak gedempte mechanische systeem kunnen we de energie $E = E_k + E_p$ uit (3.17) bekijken. Deze som is hier natuurlijk niet constant, maar neemt af doordat de dempingskracht negatieve arbeid op het systeem verricht.

Voor voldoend kleine γ mag in (3.50) ω_1 vervangen worden door ω_0, terwijl de dempingsfactor $e^{-\gamma t}$ slechts langzaam varieert. In benadering geldt dan dus

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \\ &\simeq \frac{1}{2}e^{-2\gamma t}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t - \beta) + \frac{1}{2}e^{-2\gamma t}KA^2\cos^2(\omega_0 t - \beta) \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Vergelijken we dit met (3.19) dan zien we een extra dempingsfactor die in dit geval $e^{-2\gamma t}$ bedraagt: E neemt dus 2 keer zo snel af als de amplitude van x.

sterke demping We bekijken nu het geval $\gamma > \omega_0$. We vinden nu weer $\omega = \pm\omega_1$ maar de oplossing (3.47) is nu imaginair. In dit geval kunnen we schrijven:

$$\boxed{\omega_1 = i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \tag{3.52}$$

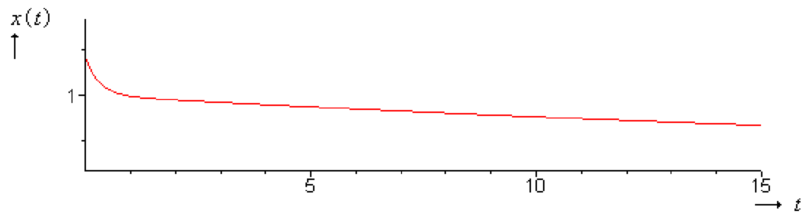
Een imaginaire frequentie lijkt raar maar als we gewoon doen alsof onze neus bloed en we substitueren het resultaat (3.52) in (3.48) dan krijgen we de algemene oplossing voor het sterk gedempte geval:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot (c_1 e^{-\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_1 t)}), \tag{3.53}$$

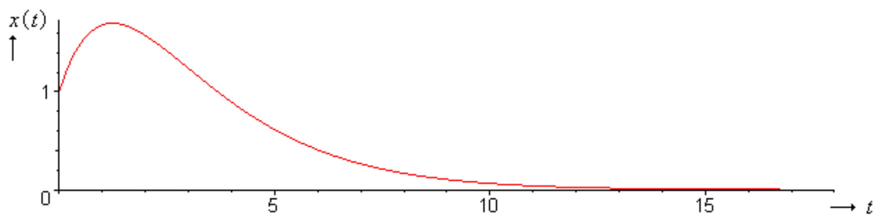
wat we ook kunnen schrijven als:

$$x(t) = c_1\, e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2\, e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \tag{3.54}$$

Figuur 3.8:



Figuur 3.9:



Deze oplossing is de som van twee reële e-machten, een die snel en een die langzaam uitdempt (zie fig. 3.8).

kritische demping Als laatse bekijken we het geval $\gamma = \omega_0$. In dit geval spreken we van *kritische demping*. Dit correspondeert met het limietgeval $\omega_1 \to 0$. Zowel (3.48) als (3.54) suggereren dat in deze limiet de oplossing wordt gegeven door $x(t) = c\ \exp(-\gamma t) = c\ \exp(-\omega_0 t)$. De expert voelt hier al nattigheid: deze oplossing heeft maar een vrij the kiezen parameter c terwijl dat er bij de algemene oplossing van een tweede-orde dfferentiaalvergelijking twee moeten zijn. De werkelijke oplossing blijkt dan ook iets algemener, nl:

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}, \tag{3.55}$$

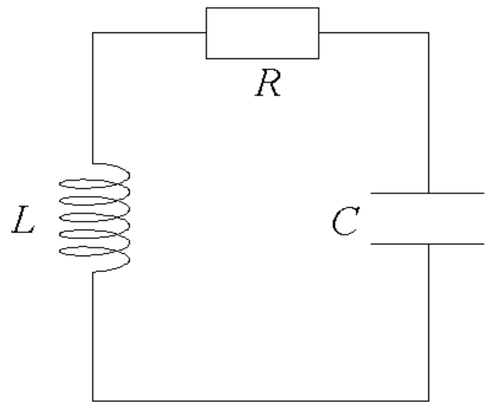
met c_1 en c_2 weer twee willekeurige constanten. Voor grote waarden van t overheerst in deze oplossing de tweede term; een voorbeeld is getekend in figuur 3.9.

- Laat zien dat beide termen in (3.55) aan de differentiaalvergelijking (3.42) voldoen in het geval dat $\omega_0 = \gamma$

In alle gevallen, zwakke, sterke en kritische demping, zien we dat de algemene oplossing nog twee willekeurige constanten c_1 en c_2 bevat. Deze twee constanten kunnen worden vastgelegd als we de begincondities kennen, d.w.z. de uitwijking en de snelheid op $t = 0$.

elektrisch systeem Als in een LC-kring een kleine weerstand R wordt opgenomen (figuur 3.10) ontstaat een LRC-kring waarin een gedempte elektrische trilling op kan

Figuur 3.10:



treden. In de praktijk is de ohmse weerstand van de spoel al zo'n kleine weerstand. Analoog met (3.40) en (3.41) geldt

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{3.56}$$

$$R = 2L\gamma \tag{3.57}$$

Om het gedrag van de oplossing $q(t)$ te bepalen moet nu de dempingsconstante $\gamma = \frac{R}{2L}$ uit (3.57) worden vergeleken met $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (zie (3.25)).

- Hoe gedragen zich voor voldoend zwakke demping 1) de spanning $\frac{q}{C}$over de condensator; 2) de stroom I in de kring; 3) de energie E uit (3.28)?

3.5 SAMENVATTING

1. Een ongedempte harmonische oscillator wordt gekenmerkt door twee systeemgrootheden: stijfheid (bijvoorbeeld veerconstante) en traagheid (bijvoorbeeld massa).

2. De vergelijking voor de 'uitwijking' van een harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.5}$$

3. Hierin is ω_0^2 gelijk aan de stijfheid gedeeld door de traagheid; voor het massaveersysteem:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \tag{3.6}$$

en voor de LC kring (met lading als 'uitwijking'):

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{3.25}$$

4. De oplossingen voor de uitwijking zijn

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \tag{3.8}$$

waarin A en β afhankelijk zijn van de begincondities. In complexe notatie heeft deze uitdrukking de vorm:

$$\boxed{x(t) = A\exp(i[\omega_0 t - \beta])} \tag{3.9}$$

5. De totale (kinetische plus potentiële) energie van een harmonische oscillator is constant in de tijd:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \tag{3.19}$$

6. Een oscillator met een niet constante stijfheid kan bij grote uitwijkingen duidelijke afwijkingen van harmonisch gedrag vertonen.

7. Een gedempte harmonische oscillator wordt gekenmerkt door drie systeemgrootheden: stijfheid, dempingsconstante en traagheid.

8. De vergelijking voor de 'uitwijking' van een gedempte harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.42}$$

9. Hierin is ω_0^2 de stijfheid gedeeld door de traagheid, en 2γ de dempingsconstante gedeeld door de traagheid; voor het gedempte massa-veersysteem:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}, 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{(3.6),(3.41)}$$

en voor de LRC kring:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, 2\gamma = \frac{R}{L} \qquad \text{(3.25),(3.57)}$$

10. Er zijn drie soorten oplossingen: één voor zwakke, één voor kritische en één voor sterke demping.

11. Alleen voor zwakke demping heeft de oplossing een oscillerend karakter:

$$x(t) = e^{-\gamma t}A\cos(\omega_1 t - \beta) \tag{3.50}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{3.47}$$

In complexe notatie is de algemene oplossing:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\cdot(c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t)}) \tag{3.48}$$

waabij c_1 en c_2 constanten zijn die afhangen van de begincondities.

12. Voor kritische demping ($\gamma = \omega_0$) sterft een uitwijking relatief snel uit.

Hoofdstuk 4

GEDWONGEN TRILLINGEN

4.1 INLEIDING

Gedwongen trillingen zijn trillingen van een zwak gedempte harmonische oscillator die ontstaan als deze niet zelfstandig en vrij trilt, maar wordt aangedreven door een externe invloed. We zullen dit verschijnsel zowel voor een mechanisch systeem als voor een elektrisch systeem bekijken.

Van belang zijn vooral de *stationaire toestanden*. Hiermee wordt bedoeld dat de amplitude en de fase van de oscillatie niet van de tijd afhangen. De frequentie van de aandrijving is bepalend voor het gedrag van het systeem. Als deze frequentie in de buurt ligt van de eigenfrequentie van het systeem (dit is de frequentie van de vrije oscillator) zullen er *resonantieverschijnselen* optreden: het systeem reageert dan relatief sterk op de aandrijving.

Daarnaast kijken we naar *inslingerverschijnselen*, die voorkomen tijdens het bereiken van stationaire toestanden. Deze kunnen worden beschreven met het begrip *superpositie*.

Net als in hoofdstuk 3, zullen we weer gebruik maken van een beschrijving met complexe getallen. Een belangrijk begrip is hierbij de *(complexe) impedantie*. Hiermee kunnen gemakkelijk de z.g. *overdrachtsfuncties* van het systeem worden beschreven.

4.2 MECHANISCH SYSTEEM

4.2.1 bewegingsvergelijking bij externe aandrijving

We kunnen de mechanische gedempte oscillator uit sectie 3.4 onderwerpen aan een periodiek variërende uitwendige kracht $F(t)$ die als een externe aandrijving gaat fungeren, zie ook Giancoli 14.8. We nemen hiervoor de eenvoudige vorm

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{4.1}$$

Dit betekent dat een nieuwe term aan de bewegingsvergelijking wordt toegevoegd, waardoor (3.40) overgaat in

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \cos\omega t \tag{4.2}$$

Met behulp van (3.6), (3.41) en de afkorting

$$D_0 = \frac{F_0}{m} \tag{4.3}$$

wordt dit

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D_0 \cos\omega t} \tag{4.4}$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de *gedwongen harmonische oscillator*. Let op: de hoekfrequentie ω wordt bepaald door de aandrijving, en heeft dus in het algemeen een andere waarde dan de hoekfrequenties ω_0 uit (3.6) of ω_1 uit (3.47).

Het is interessant om na te gaan hoe het gedempte massa-veersysteem bij vaste D_0 reageert voor verschillende waarden van ω. Het zal blijken dat de oscillator bij elke ingestelde waarde van ω na enige tijd *inslingeren* een harmonische beweging met hoekfrequentie ω aanneemt, waarbij de amplitude en de faseachterstand ten opzichte van $F(t)$ beide van de keuze van ω afhankelijk zijn. We spreken dan van een *stationaire toestand*. De eigenschappen van stationaire toestanden zullen we hieronder bekijken.

stationaire oplossing Een stationaire oplossing van (4.4) is te schrijven in één van de vormen

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \beta)} \tag{4.5a}$$

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{4.5b}$$

waarbij

$$a = A\cos\beta, b = A\sin\beta \tag{4.6}$$

Volgens (4.1) en (4.5a) stelt β de *faseachterstand* voor die de uitwijking $x(t)$ van de stationaire oplossing heeft ten opzichte van de externe kracht $F(t)$.

Veruit de gemakkelijkste weg om tot deze oplossing te komen en daarbij tevens de waarden van A en β te vinden, is via complexe getallen. We gaan als volgt te werk: eerst herschrijven we de differentiaalvergelijking (4.4) in complexe vorm,

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D_0 \exp(i\omega t).} \tag{4.7}$$

We doen nu weer een slimme gok en veronderstellen dat de oplossing de volgende vorm heeft:

$$x(t) = Ae^{i(\omega t - \beta)}. \tag{4.8}$$

Als we de eerste en de tweede afgeleide van $x(t)$ berekenen en deze invullen in de differentiaalvergelijking (4.7)vinden we:

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)Ae^{i(\omega t-\beta)} = D_0 e^{i\omega t}. \tag{4.9}$$

Aan beide zijden van deze vergelijking staat de gemeenschappelijke factor $\exp(i\omega t)$. Door deze weg te delen vinden we:

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)Ae^{-i\beta} = D_0. \tag{4.10}$$

De absolute waarde van deze uitdrukking vinden we als we beide kanten vermenigvuldigen met hun respectievelijke complex-geconjugeerden (zie hoofdstuk 2). Dit geeft de volgende uitdrukking voor het kwadraat van de norm:

$$((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2)A^2 = D_0^2, \tag{4.11}$$

ofwel

$$\boxed{A = D_0 \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}}. \tag{4.12}$$

Als we alleen geïnteresseerd zijn in de amplitude van de oscillatie dan zijn we nu klaar: uitdrukking (4.12) geeft direct de verhouding van de amplitudes van de trilling (A) en de aandrijvende kracht (mD_0). In het linkerdeel van figuur 4.1 is deze amplitude geplot als functie van ω/ω_0 voor drie waarden van γ ($\gamma = \omega_0/3$, $\gamma = \omega_0/2$ en $\gamma = \omega_0$ terwijl $D_0/\omega_0^2 = 1$).

De faseachterstand β vinden we door terug te gaan naar uitdrukking (4.10). Het linker lid van deze uitdrukking is evenredig met $A\exp(i[\phi - \beta])$ waarbij $\tan\phi = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Omdat de fase van het rechterlid van (4.10) nul is (D_0 is reëel) geldt dus dat $\phi = \beta$ en dus:

$$\boxed{\tan\beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \tag{4.13}$$

In het linker plaatje in figuur 4.1 is β uitgezet tegen ω/ω_0 voor drie waarden van γ.

Je kunt je afvragen of de resultaten (4.12) en (4.13) ook direct zijn te vinden uit de reële vorm van de differentiaalvergelijking (4.4) door invullen van (4.5a). Dat kan. Probeer het maar eens:

- Leid de uitdrukkingen (4.12) en (4.13) af door invullen van (4.5a) en zijn afgeleiden in (4.4)

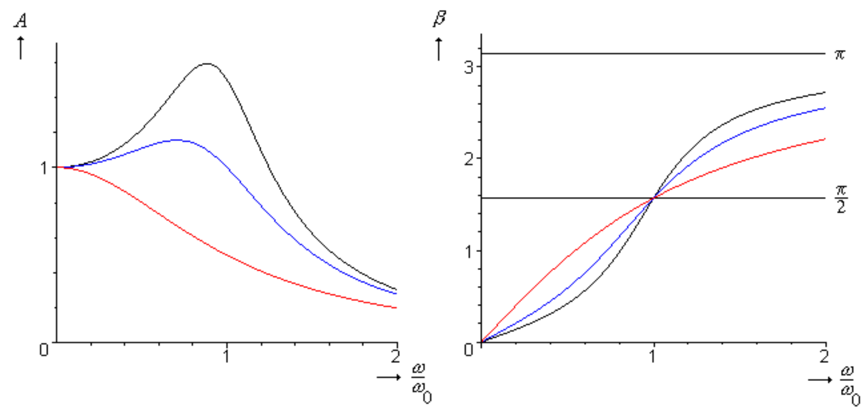
Wellicht is je aversie tegen complexe getallen iets afgenomen na het uitwerken van bovenstaande opdracht.

De werkelijke amplitude is, als gezegd, het reële deel van $x(t) = A\exp(i[\omega t - \beta])$ en dat geeft uitdrukking (4.5a). Soms is het handig om deze uitdrukking te herschrijven in de vorm (4.5b). We vinden dan:

$$a = D_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{4.14a}$$

$$b = D_0 \frac{2\gamma\omega}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{4.14b}$$

Figuur 4.1: Amplitude (A) en faseachterstand (β) van de aangedreven oscillator uitgezet tegen ω/ω_0 voor $\gamma = \omega_0/3$, $\gamma = \omega_0/2$ en $\gamma = \omega_0$. Hierbij is $D_0/\omega_0^2 = 1$ gekozen.



Je kunt eenvoudig, met Pythagoras, controleren dat $a^2 + b^2 = A^2$ en $b/a = \tan\beta$.

Wat we zojuist hebben gezien is het volgende: als een gedempte harmonische oscillator wordt aangedreven met een periodieke kracht met hoekfrequentie ω dan zal de uitwijking een periodieke functie zijn met *de zelfde* frequentie ω. Voor het zwak gedempte geval ($\gamma << \omega_0$) vertoont de amplitude een maximum als de aandrijffrequentie in de buurt ligt van ω_0. Om deze reden wordt ω_0 de resonantiehoekfrequentie genoemd. Voor $\omega << \omega_0$ is de uitwijking vrijwel in fase met de aandrijvende kracht, voor $\omega >> \omega_0$ loopt de uitwijking achter bij de aandrijfkracht met een faseachterstand $\beta \approx \pi$. Als $\omega = \omega_0$ dan is de faseachterstand precies $\pi/2$.

- Laat zien dat voor $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ het maximum van de amplitude van de oscillator optreedt bij $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ en anders bij $\omega = 0$.

4.2.2 resonantie

Uit het voorgaande blijkt dat het hoekfrequentiegebied $\omega \simeq \omega_0$ speciale aandacht verdient. De termen d^2x/dt^2 en $\omega_0^2 x$ in (4.4) en (4.7) zijn dan nagenoeg tegengesteld, zodat $F(t)$ steeds bijna in fase is met de snelheid dx/dt. De amplitude A bereikt dan bij geringe demping relatief grote waarden, terwijl door de oscillator relatief veel vermogen wordt opgenomen en weer afgestaan. Deze verschijnselen duidt men aan met *resonantie*.

gemiddeld vermogen als functie van de frequentie Een goed uitgangspunt om de resonantieverschijnselen iets nauwkeuriger te beschrijven is het opstellen van een uitdrukking voor het *gemiddelde vermogen* dat in een stationaire toestand door de uitwendige kracht $F(t)$ aan de oscillator wordt geleverd.

Het (tijdsafhankelijke) vermogen $P(t)$ wordt gegeven door

$$P(t) = F(t)v(t) = F(t)\frac{dx}{dt}, \tag{4.15}$$

waar F en $\frac{dx}{dt}$ de echte, dus reële kracht en snelheid voorstellen. Het gemiddelde vermogen $\langle P \rangle$ is het tijdsgemiddelde van $P(t)$ over één periode $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\frac{dx}{dt}dt \tag{4.16}$$

Uit (4.5b) volgt

$$\frac{dx}{dt} = -\omega a \sin\omega t + \omega b \cos\omega t \tag{4.17}$$

Invullen van (4.1), (4.17) en (4.14b) in (4.16) leidt tot

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F_0 \cos\omega t \left(-\omega a \sin\omega t + \omega b \cos\omega t\right) dt \\
&= -F_0\omega a \,\langle \cos\omega t \sin\omega t \rangle + F_0\omega b \,\left\langle \cos^2\omega t \right\rangle \\
&= 0 + F_0\omega \left(\frac{F_0}{m}\frac{2\gamma\omega}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{F_0^2}{4m\gamma}\frac{(2\gamma\omega)^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

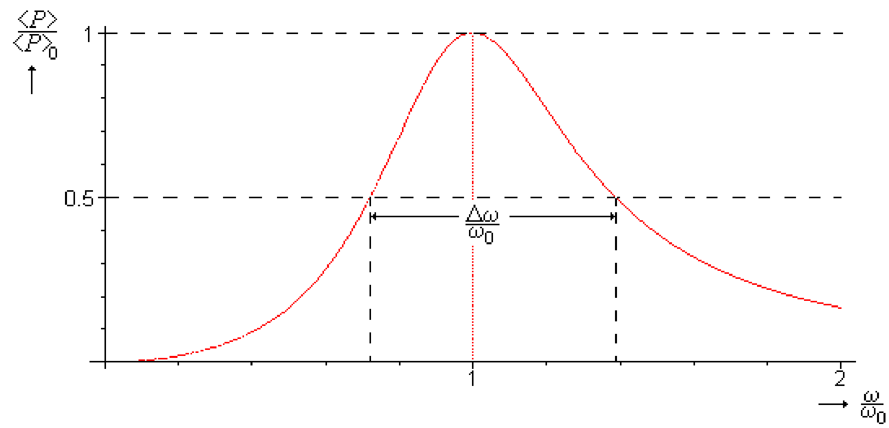
Aan (4.18) is te zien hoe $\langle P \rangle$ zich bij vaste m, γ, ω_0 en F_0 gedraagt als functie van ω. De laatste factor in (4.18) bereikt een maximale waarde 1 voor $\omega = \omega_0$, zodat $\langle P \rangle$ een maximum

$$\langle P \rangle_0 = \frac{F_0^2}{4m\gamma} \tag{4.19}$$

heeft voor $\omega = \omega_0$. Bij de resonantiehoekfrequentie wordt dus gemiddeld over de tijd het grootste vermogen door de externe kracht aan het systeem geleverd (zie ook figuur 4.2).

Je zou je kunnen afvragen waarom we bij het afleiden van (4.19) uit (4.15) zijn uitgegaan van de *reële* kracht en snelheid en niet van de complexe generalisatie. De reden is de volgende: als we in (4.15) de complexe kracht en snelheid zouden invullen dan is het werkelijke (reële) vermogen niet het reële deel van dit product. Dit is het gevolg van de in hoofdstuk 2 gegeven eigenschap dat het reële deel van het product van twee complexe getallen niet het zelfde is als het product van hun reële delen. Bij wijze van uitzondering zijn bij de afleiding van (4.19) complexe getallen dus niet erg handig.

Figuur 4.2:



halfwaardebreedte In figuur 4.2 is, bij wijze van voorbeeld, $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0}$ tegen $\frac{\omega}{\omega_0}$ uitgezet voor de waarde $\gamma = \omega_0/3$. In verband met het optredende maximum spreken we van een *resonantiecurve*. Let op: in tegenstelling tot de curves voor A uit figuur 4.1 hebben *alle* resonantiecurves voor $\langle P \rangle$ een maximum, ook voor grote waarden van γ. Bovendien liggen al deze maxima exact bij $\omega/\omega_0 = 1$.

In figuur 4.2 zijn ook de twee waarden van ω/ω_0 aangegeven waarvoor $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \langle P \rangle_0$. Het verschil $\triangle\omega/\omega_0$ tussen deze twee waarden is een maat voor de breedte van de resonantiecurve, en wordt de *halfwaardebreedte* genoemd. Evenzo is in een niet-genormeerd diagram, waarin $\langle P \rangle$ voor zekere γ direct tegen ω is uitgezet, de halfwaardebreedte gelijk aan de *bandbreedte* $\Delta\omega$. Dit is dus het verschil tussen de twee hoekfrequenties ω_b en ω_a waarvoor het gemiddeld overgedragen vermogen de helft van het maximum (bij die γ) bedraagt. Eenvoudig kan worden afgeleid dat

$$\boxed{\omega_b - \omega_a = \Delta\omega = 2\gamma} \tag{4.20}$$

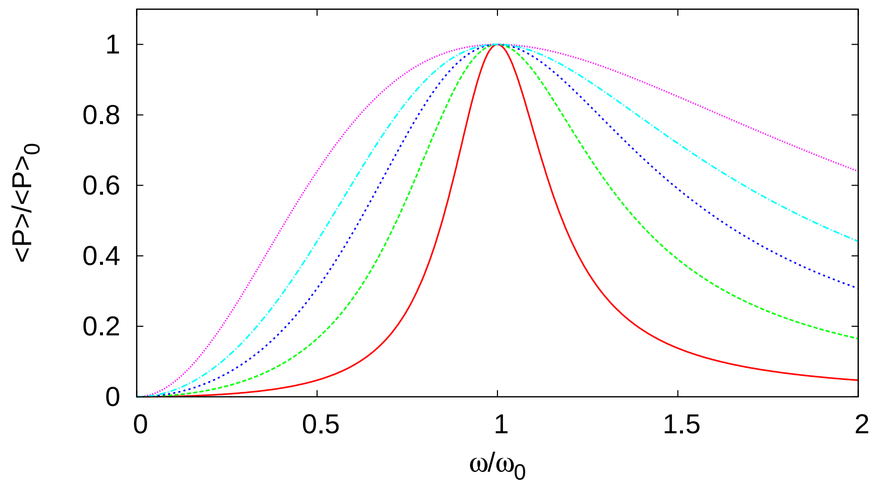
- Ga met behulp van (4.18) en (4.19) na dat $\omega_a = -\gamma + \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$ en $\omega_b = \gamma + \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$. Hoe liggen ω_a en ω_b ten opzichte van ω_0 bij zwakke demping?

kwaliteitsfactor Hoe kleiner $\triangle\omega$ is ten opzichte van ω_0, des te smaller is de resonantiepiek. Daarom wordt $\omega_0/\triangle\omega$ de *kwaliteitsfactor* Q genoemd:

$$Q = \frac{\omega_0}{\triangle\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \tag{4.21}$$

Een zwak gedempt systeem heeft dus een hoge kwaliteitsfactor. Het reageert met betrekking tot het opnemen van vermogen *selectief* (met een scherpe piek) als de aangeboden frequentie gevarieerd wordt.

Figuur 4.3:



In figuur 4.3 is, op de manier van figuur 4.2, een verzameling resonantiecurves uitgezet voor verschillende waarden van γ. Voor kleine γ liggen ω_a en ω_b vrijwel symmetrisch ten opzichte van ω_0.

4.2.3 inslingerverschijnselen

superpositiebeginsel We kunnen bij de in de vorige paragraaf gevonden oplossing, de oplossing van de vrije (dus niet-aangedreven) oscillator optellen. De differentiaalvergelijking voor de *gedwongen* harmonische oscillator (4.4), en die voor de *vrije gedempte* harmonische oscillator (3.40) zijn:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D_0 \cos\omega t \tag{4.4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.40}$$

We kunnen dit desgewenst ook in complexe vorm weergeven, in dat geval vervangen we (4.4) door (4.7). Het superpositiebeginsel zegt nu dat elke superpositie van een willekeurige oplossing $x_{vrij}(t)$ van (3.40) en een stationaire oplossing $x_{stat}(t)$ van (4.4)

$$x(t) = x_{vrij}(t) + x_{stat}(t) \tag{4.22}$$

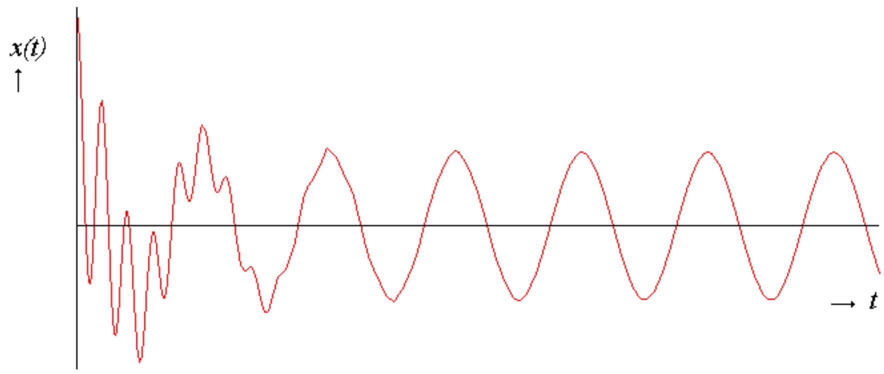
opnieuw een oplossing is van (4.4). Volgens (3.50) en (4.5a) wordt dit bij zwakke demping:

$$x(t) = e^{-\gamma t} A_1 \cos(\omega_1 t - \beta_1) + A\cos(\omega t - \beta) \tag{4.23}$$

of complex genoteerd:

$$x(t) = e^{-\gamma t} A_1 e^{i(\omega_1 t - \beta_1)} + A e^{i(\omega t - \beta)} \tag{4.24}$$

Figuur 4.4:



Hierbij worden A_1 en β_1 bepaald door de begincondities, maar A en β door (4.12) en (4.13). Deze oplossingen voor het gedwongen systeem zijn dus algemener dan een stationaire oplossing, en niet periodiek. De *uitstervende* term $x_{vrij}(t)$ wordt, in tegenstelling tot de *periodieke* term $x_{stat}(t)$, beheerst door de hoekfrequentie ω_1. Het resultaat voor de superpositie $x(t)$ kan er bijvoorbeeld uitzien zoals in figuur 4.4 (Let wel: $x_{vrij}(t)$ is op zich zelf géén oplossing van (4.4), maar draagt tijdens het inslingeren wel bij aan $x(t)$).

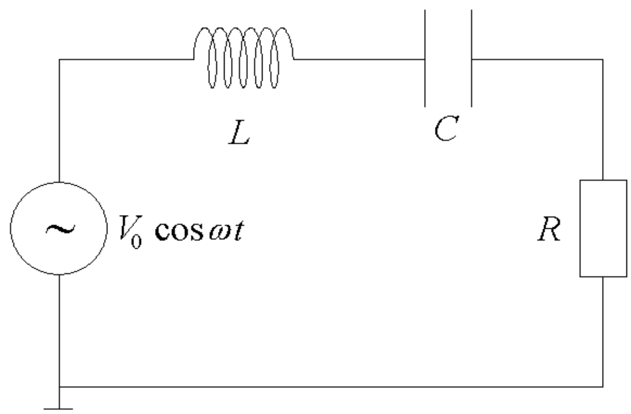
- Geef in het geval van figuur 4.4 de grootste frequentie aan: ω of ω_1.

4.3 ELEKTRISCH SYSTEEM

4.3.1 analogie met mechanisch systeem

In figuur 4.5 is een LCR-kring weergegeven waarin een wisselspanningsbron is opgenomen. Er zijn twee redenen om dit systeem nader te bestuderen: ten eerste zal blijken dat deze *gedwongen electrische oscillator*, wiskundig, volledig analoog is aan de mechanische aangedeven oscillator. Dit maakt duidelijk dat dezelfde wiskundige beschrijving van toepassing is op totaal verschillende systemen. Een tweede reden is een praktische, in de experimentele praktijk is de elektrische oscillator vaak gemakkelijker te bestuderen. Men heeft grote vrijheid in de keuze van de waarden van de componenten (L, C en R) en het is gemakkelijk om de hoekfrequentie ω over een groot bereik te varieëren. Verder is het zo dat gemakkelijk (b.v. met een scoop) zowel de amplitudes als de fasen van de spanningen over de afzonderlijke componenten zijn te meten. In het mechanische equivalent is het lastiger om zowel de uitwijking, de snelheid als de versnelling, rechtstreeks experimenteel te bepalen.

Figuur 4.5:



stationaire oplossing voor de stroom Als de LRC-kring wordt aangesloten op een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos \omega t$ zal er een *gedwongen elektrische trilling* optreden, waarbij in de praktijk heel snel een stationaire toestand intreedt, zie ook Giancoli 30.7-30.9.

Op dezelfde manier als (4.2) kunnen we de differentiaalvergelijking schrijven als:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t \tag{4.25}$$

Als we delen door L en overgaan op de complexe schrijfwijze krijgen we het elektrisch equivalent van (4.7):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{V_0}{L}\exp(i\omega t). \tag{4.26}$$

Uiteraard is hier $2\gamma = R/L$ en $\omega_0^2 = 1/LC$.

De stationaire oplossing voor de lading op de condensator ziet er dan uit als

$$q(t) = Ae^{i(\omega t - \beta)} \tag{4.27}$$

waarin, analoog met (4.12) en (4.13,

$$A = \frac{V_0}{L}\frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \tag{4.28a}$$

$$\tan\beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{4.28b}$$

Bij de mechanische oscillator zagen we dat de uitwijking $x(t)$ achter liep bij de aandrijvende kracht. De faseachterstand was β. Vertaling naar het elektrische systeem leert ons dat de oscillerende lading q met dezelfde fase β achter loopt op de aandrijvende wisselspanning. In de praktijk is het veel makkelijker om de stroom te meten dan om de lading op de condensator direct te bepalen. Het is daarom zinvol om voor het elektrische geval te kijken naar de faseachterstand van de stroom ten opzichte van de aandrijfspanning. De stroom is de tijdsafgeleide van de lading. Uit (4.27) volgt voor de stationaire stroom $I(t)$ in de kring:

$$I(t) = -i\,\omega A\,e^{(\omega t-\beta)} = \omega A\,e^{(\omega t-\alpha)}, \tag{4.29}$$

waarbij de faseachterstand α van de stroom op de aangelegde spanning $V(t)$ moet voldoen aan

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}. \tag{4.30}$$

Omdat $0 < \beta < \pi$ volgt dus:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{4.31}$$

Dit laatste betekent dat $I(t)$, afhankelijk van de waarde van $\frac{\omega}{\omega_0}$, in werkelijkheid vóór of achter kan lopen op $V(t)$.

Voor de maximale waarde $I_m = \omega A$ en voor de faseachterstand α van $I(t)$ op $V(t)$ volgt uit (4.28) en (4.30)

$$I_m = \frac{V_0}{L}\frac{\omega}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}} \tag{4.32a}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega} \tag{4.32b}$$

Om formules te krijgen in termen van R, L en C vullen we (3.57) en (3.25) in, met als resultaat:

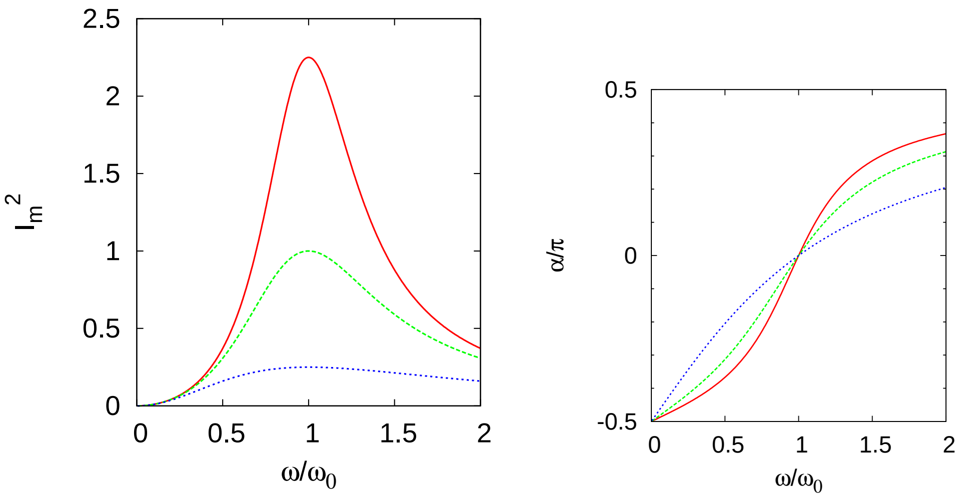
$$\boxed{I_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}} \tag{4.33a}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}} \tag{4.33b}$$

- Voor welke waarden van $\frac{\omega}{\omega_0}$ loopt $I(t)$ vóór op $V(t)$, voor welke waarden achter?

We zullen straks zien dat het handig is om het kwadraat van de maximale stroom als functie van ω te beschouwen. In figuur 4.6 zetten we I_m^2 en α uit tegen $\frac{\omega}{\omega_0}$ voor vaste waarden van L en C en voor verschillende waarden van R.

Figuur 4.6:



impedanties We kunnen (4.26) in de volgende vorm schrijven:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 e^{i\omega t}. \tag{4.34}$$

Alle termen in deze vergelijking hebben de dimensie van spanning. Hierbij geldt voor de complexe spanningen over condensator, weerstand en spoel:

$$V_C = \frac{q(t)}{C} \tag{4.35a}$$

$$V_R = R\frac{dq}{dt} = i\omega R q(t) \tag{4.35b}$$

$$V_L = L\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 L q(t) \tag{4.35c}$$

Als we (4.34) delen door de complexe stroom $I(t) = \frac{dq}{dt}$ ontstaat een vergelijking waarin elke complexe term de dimensie heeft van een weerstand. Links staan de complexe weerstanden (*impedanties*) Z_L, Z_R en Z_C van de componenten L, R en C; rechts de impedantie Z van de hele serieschakeling:

$$\frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}(t)} + \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}(t)} + \frac{\tilde{V}_C}{\tilde{I}(t)} = \frac{\tilde{V}(t)}{\tilde{I}(t)} \tag{4.36a}$$

$$\boxed{Z_L + Z_R + Z_C = Z} \tag{4.36b}$$

Deze uitdrukking is in feite niets anders dan een complexe generalisatie van de welbekende *wet van Ohm*: de spanning over een circuitelement is evenredig met de stroom door dat element. De (complexe) evenredigheidsconstante heet de impedantie. Deze neemt de plaats in van de weerstand R voor het reële geval.

We gebruiken nu:

$$q(t) = Ae^{i(\omega t-\beta)} \tag{4.37a}$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = i\omega q(t) = \omega A e^{i(\omega t-\alpha)} \tag{4.37b}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\,\omega^2 q(t) = -\omega^2 A e^{i(\omega t-\beta)} \tag{4.37c}$$

Invullen van (4.37) en (4.35) in (4.36) geeft:

$$\boxed{Z_L = i\omega L, \quad Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}} \tag{4.38a}$$

$$Z = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\omega A e^{i(\omega t-\alpha)}} = \frac{V_0}{I_m} e^{i\alpha} = |Z|\, e^{i\alpha} \tag{4.38b}$$

en dus gaat (4.34) bij het invullen van deze oplossingen over in de gelijkheid

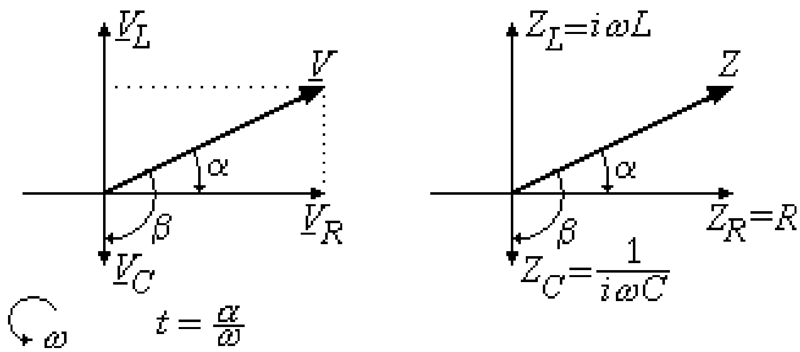
$$R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|\, e^{i\alpha} \tag{4.39}$$

die consistent is met (4.33).

vectorvoorstelling We hebben de spanningen, stromen en impedanties weergegeven door complexe getallen. Deze kunnen we op elk tijdstip weergeven als vectoren in het complexe vlak (het fasordiagram). Als we zo'n diagram tekenen voor de spanningen dan is de totale spanning de vectoroptelling van de vectoren die de spannningen over de verschillende componenten weergeven. Alle vectoren draaien in dit diagram rond met hoeksnelheid ω. Hetzelfde kunnen we doen voor de impedanties. De fasordiagrammen voor spanning en impedantie zijn weergegeven in figuur 4.7 op het tijdstip $t = \frac{\alpha}{\omega}$. Het fasordiagram voor de impedantie lijkt als twee druppels water op dat van de spanning, het verschil is echter dat de impedantievectoren stil staan terwijl die voor de spanning, als gezegd, ronddraaien met hoekfrequentie ω.

overdrachtsfuncties en systeemkarakteristieken Stel dat we in de schakeling van figuur 4.5 een oscilloscoop aansluiten parallel aan de weerstand R. Hiermee meten we de wisselspanning over de weerstand. Voor gegeven V_0 zal de grootte van deze spanning afhangen van ω. Ook de fase van de (wissel)spanning over de weerstand t.o.v. die van de bronspanning is een functie van ω. De bronspanning $V_0 \cos \omega t$ (of $V_0 \exp i\omega t$) noemen we de *input* terwijl we de spanning over de weerstand de *output* noemen. Omdat de amplitude en fase van de outputspanning afhangen van de hoekfrequentie, noemen we zo'n systeem een filter. Omdat het filter wordt beschreven door een tweede-orde differentiaalvergelijking spreken we ook van een *tweede-orde filter*. We kunnen onze scoop ook parallel aan de condensator of de spoel aansluiten. Ook in dit geval zijn de amplitudes en fasen van de gemeten spanning aan de output, functies van ω. Ook deze schakelingen zijn tweede-orde filters.

Figuur 4.7:



Als we werken met complexe spanningen kunnen we de z.g. *respons* van het filter beschrijven via een dimensieloze *complexe overdrachtsfunctie* $G(\omega)$ die volgt uit de tweede-orde differentiaalvergelijking (4.34). Deze functie wordt gedefinieerd als de complexe verhouding van output en input:

$$G(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{out}}{Z_{in}} \tag{4.40}$$

Deze verhouding hangt niet af van de tijd, en bevat alle informatie die nodig is om *amplitude-en fasekarakteristieken* te tekenen.

De amplitudekarakteristiek (AK) is de grafiek van de amplitudeverhouding, de fasekarakteristiek (FK) die van de fasevoorsprong:

$$|G(\omega)| = \frac{\textit{amplitude van de output}}{\textit{amplitude van de input}} \quad \rightarrow \quad \text{AK} \tag{4.41a}$$

$$\arg(G(\omega)) = \textit{fasehoek van de output} - \textit{fasehoek van de input} \quad \rightarrow \quad \text{FK} \tag{4.41b}$$

stroomresonantie Nemen we $V_R(t)$ als output dan is deze evenredig met de stroom $I(t)$ in (4.37b). Dit niets anders dan de wet van Ohm. Bij een bepaalde waarde van ω zal deze spanning (en dus ook de stroom) maximaal zijn. Daarom spreken we hier van *stroomresonantie*. Uit (4.40) en (4.38b) volgt

$$G(\omega) = \frac{V_R}{V} = \frac{Z_R}{Z} = \frac{R}{|Z|}e^{-i\alpha} \tag{4.42a}$$

$$|G(\omega)| = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4.42b}$$

$$\arg(G(\omega)) = -\alpha \text{ (met } \tan\alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \text{)} \tag{4.42c}$$

spanningsresonantie Nemen we $V_C(t)$ als output dan is deze evvenredig met de opgeslagen lading $q(t)$ in (4.37a). We noemen dit *spanningsresonantie*. Uit (4.40) en (4.38b) volgt nu

$$G(\omega) = \frac{V_C}{V} = \frac{Z_C}{Z} = \frac{1}{i\omega C\,|Z|}e^{-\,i\alpha} = \frac{1}{\omega C\,|Z|}e^{-\,i\beta} \tag{4.43a}$$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\omega C\,|Z|} = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4.43b}$$

$$\arg(G(\omega)) = -\,\beta \text{ (met } \tan\beta = \frac{R}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}\text{)} \tag{4.43c}$$

- Ga na dat het gedrag van $|G(\omega)|$ en $-\ \arg(G(\omega))$ voor verschillende waarden van R wordt weerspiegeld door figuur 4.1. Waarom is de schakeling met $V_C(t)$ als output een hoogafsnijdend filter?

vermogen en kwaliteitsfactor Tot slot van dit hoofdstuk kijken we naar het gemiddelde vermogen dat de spanningsbron aan de kring levert. Dit is, analoog aan (4.16) en (4.18):

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt \\ &= \frac{V_0^2}{4L\gamma}\frac{(2\gamma\omega)^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}\end{aligned} \tag{4.44}$$

Bij variatie van ω geeft dit aanleiding tot resonantiecurves zoals in figuur 4.3, met kwaliteitsfactor

$$Q = \frac{\omega_0}{\triangle\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{4.45}$$

gedrag van I_m^2 Uit (4.32a) volgt:

$$I_m^2 = \frac{V_0^2}{4L^2\gamma^2}\frac{(2\gamma\omega)^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{4.46}$$

Vergelijken van (4.44) en (4.46) leert dat

$$\langle P\rangle = L\gamma I_m^2 = \frac{1}{2}RI_m^2 \tag{4.47}$$

- Waarom was het resultaat (4.47) te verwachten?

Dit betekent dat I_m^2 en $\langle P \rangle$ zich voor een vaste waarde van R op dezelfde manier gedragen als functie van ω. De curves voor I_m^2 zoals in figuur 4.6 zijn dan ook gelijkvormig met vermogensresonantiecurves.

Uit curves voor I_m^2 als functie van ω kan dus, net als uit $\langle P \rangle$ als functie van ω, op 50% van de piekhoogte een halfwaardebreedte of *bandbreedte*

$$\omega_b - \omega_a = \triangle\omega = \frac{R}{L} \tag{4.48}$$

van hoekfrequenties worden afgelezen waarvoor het gemiddeld overgedragen vermogen meer dan de helft van het maximum is. (Let op: uit I_m als functie van ω kan dezelfde bandbreedte $\triangle\omega$ dus worden afgelezen op $\frac{1}{2}\sqrt{2} \times 100\% \simeq 70\%$ van de piekhoogte).

De waarden ω_a en ω_b waarbij voor een bepaalde LRC-kring geldt dat $\langle P \rangle = \frac{1}{2}\langle P \rangle_0$ heten ook wel de ***3dB-punten*** van het systeem, omdat daar de verzwakking in dB gelijk is aan $-10^{10}\log\frac{1}{2} \simeq 3$. Deze verzwakking is een logaritmische maat voor $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0}$. Een afname met 3 dB komt dus ongeveer overeen met een factor $\frac{1}{2}$ in het vermogen.

Als we de spanning meten over de weerstand en we bepalen de bovengenoemde overdrachtsfunctie $G(\omega)$ dan is $|G(\omega)|^2$ een maat voor het overgedragen vermogen.

- Ga na dat het gedrag van $|G(\omega)|^2$ en $-\arg(G(\omega))$ voor verschillende waarden van R wordt weerspiegeld door figuren 4.3 en 4.6. Waarom wordt de schakeling met $V_R(t)$ als output een *bandfilter* genoemd?
- Bereken $G(\omega_0)$ en $\arg(G(\omega_0))$.

4.4 SAMENVATTING

1. De vergelijking voor de uitwijking van een mechanische gedwongen harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D_0 \cos\omega t \tag{4.4}$$

of in complexe notatie:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D_0 \exp(i\omega t).} \tag{4.7}$$

2. De oplossingen zijn superposities van de vorm

$$x(t) = x_{vrij}(t) + x_{stat}(t) \tag{4.22}$$

Hierin is de blijvende (stationaire) oplossing $x_{stat}(t)$ onafhankelijk van de begincondities, terwijl met de toevoeging $x_{vrij}(t)$ een inslingerverschijnsel wordt beschreven.

3. In de limiet $x_{vrij}(t) \to 0$ (stationaire toestand) geldt

$$x(t) = A\cos(\omega t - \beta) \tag{4.5a}$$

of complex opgeschreven:

$$x(t) = Ae^{i(\omega t - \beta)}. \tag{4.8}$$

Hier is

$$A = D_0 \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \tag{??}$$

$$\tan\beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{??}$$

4. Het door de uitwendige kracht aan de oscillator geleverde gemiddelde vermogen $\langle P \rangle$ als functie van ω is maximaal voor $\omega = \omega_0$. Dit noemen we (vermogens)resonantie.

5. De bandbreedte is de halfwaardebreedte van de vermogensresonantiepiek $\langle P \rangle (\omega)$, gemeten op de halve piekhoogte:

$$\triangle\omega = \omega_b - \omega_a = 2\gamma \tag{4.20}$$

Een zwak gedempt systeem geeft een scherpe resonantiepiek.

6. Een LRC-kring aangesloten op een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos\omega t$ (of $V(t) = V_0 \exp i\omega t$) zal een gedwongen elektrische trilling uitvoeren. De maximale stroom en de faseachterstand van de stroom op de spanning worden in de stationaire toestand gegeven door

$$I_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4.33a}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{4.33b}$$

7. De (complexe) impedantie Z van de serieschakeling van de componenten L, R en C is

$$Z = Z_L + Z_R + Z_C \tag{4.36b}$$

waarbij

$$Z_L = i\omega L, \quad Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{4.38a}$$

8. Bij stroomresonantie ($V_R(t)$ als output) worden amplitude-en fasekarakteristiek bepaald door de (complexe) overdrachtsfunctie $G(\omega)$ volgens

$$|G(\omega)| = \frac{R}{|Z|} \tag{4.42b}$$

$$\arg(G(\omega)) = -\alpha \tag{4.42c}$$

9. Bij spanningsresonantie ($V_C(t)$ als output) worden amplitude-en fasekarakteristiek bepaald door de (complexe) overdrachtsfunctie $G(\omega)$ volgens

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\omega C\,|Z|} \tag{4.43b}$$

$$\arg(G(\omega)) = -\,\beta \tag{4.43c}$$

Hoofdstuk 5

GEKOPPELDE TRILLINGEN

5.1 INLEIDING

In de vorige hoofdstukken hebben we de resultaten voor de harmonische oscillator gegeneraliseerd door een demping en een uitwendige kracht in te voeren. Hierbij bleef de eigenhoekfrequentie ω_0 van de vrije ongedempte oscillator, behorend bij de enige aanwezige *vrijheidsgraad*, een rol spelen.

In dit hoofdstuk bespreken we een heel andere generalisatie: het vrije, ongedempte systeem kan bestaan uit een rij van twee of meer *gekoppelde* harmonische oscillatoren, met twee of meer variabelen voor de uitwijkingen (in het elektrische geval: ladingen) hiervan.

We krijgen dan te maken met twee of meer harmonische trillingsmogelijkheden voor het systeem als geheel: dit zijn de *normaaltrillingen*, die elk een kenmerkende eigenfrequentie hebben. Deze normaaltrillingen zijn collectieve eigenschappen van het hele systeem en niet van een individuele oscillator. Ze zijn de bouwstenen die een willekeurige bewegingstoestand van het systeem bepalen. In het geval van twee vrijheidsgraden kijken we speciaal naar het verschijnsel *zwevingen*.

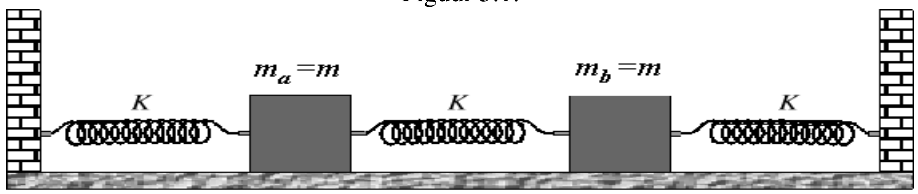
In het geval van N vrijheidsgraden kijken we vooral naar gekoppelde trillingen die de opmaat vormen voor zowel staande als lopende golven. Naast longitudinate uitwijkingen komen ook transversale uitwijkingen hier voor het eerst aan de orde. Ook dispersie (het verband tussen frequentie in plaats en frequentie in tijd) wordt geïntroduceerd.

5.2 TWEE VRIJHEIDSGRADEN

5.2.1 twee massa's en drie veren

Kijk eens naar het systeem van figuur 5.1: twee glijdende massa's a en b die met behulp van drie veren tussen twee muren gespannen zijn en longitudinaal kunnen bewegen. Dit zijn twee harmonische oscillatoren zonder demping, gekoppeld door de middelste veer.

Figuur 5.1:



De resulterende bewegingen van de beide massa's zullen in het algemeen nogal ingewikkeld zijn, maar het is ook mogelijk om het geheel een harmonische beweging te laten uitvoeren. We zullen zien dat er één hoekfrequentie ω_1 bestaat waarmee beide delen a en b in fase harmonisch kunnen trillen, en één frequentie ω_2 waarmee dat in tegenfase gebeuren kan. Deze twee simpele bewegingsmogelijkheden van het systeem corresponderen met twee *vrijheidsgraden* en heten *normaaltrillingen*. Het kan niet genoeg benadrukt worden dat zo'n normaaltrilling alle oscillatoren beschrijft. Alle massa's (in dit voorbeeld twee) oscilleren bij een normaaltrilling allemaal met dezelfde frequentie, maar in het algemeen allemaal met een verschillende amplitude (hier toevallig hetzelfde). Een willekeurige beweging, ja elke willekeurige beweging van het systeem kan als een superpositie van deze normaaltrillingen worden gezien.

berekening van de normaaltrillingen Neem aan dat beide massa's m_a en m_b gelijk zijn aan m, en dat alle veren een veerconstante K hebben. Voor de uitwijkingen x_a en x_b geldt dan het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$m\frac{d^2x_a}{dt^2} = -Kx_a - K(x_a - x_b) \tag{5.1a}$$

$$m\frac{d^2x_b}{dt^2} = -Kx_b - K(x_b - x_a) \tag{5.1b}$$

De vergelijkingen heten *gekoppeld* omdat ze beide zowel x_a als x_b bevatten. In het rechterlid van bijvoorbeeld (5.1a) is de eerste term de ten gevolge van x_a aanwezige extra kracht van de linker veer op m_a, en de tweede term de ten gevolge van x_a en x_b aanwezige extra kracht van de koppelingsveer (de middelste) op m_a. Samen geven deze termen de totale kracht op m_a.

- Leg uit dat (5.1) geldt, onafhankelijk van hoe sterk de veren in de evenwichtsstand gespannen zijn.

We zoeken nu eerst naar oplossingen $\{x_a(t), x_b(t)\}$ van dit stelsel die samen een normaaltrilling vormen, en stellen daartoe

$$x_a(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{5.2a}$$

$$x_b(t) = \alpha A\cos(\omega t + \phi), \tag{5.2b}$$

oftewel a en b bewegen beide harmonisch, en zijn steeds in fase óf steeds in tegenfase al naar gelang α positief of negatief is. In een normaaltrilling hebben $x_b(t)$ en $x_a(t)$ dus onafhankelijk van t een vaste verhouding α. Door de inperking (5.2) van onbekende functies $x_a(t)$ en $x_b(t)$ in te vullen in de differentiaalvergelijken (5.1), die het stelsel beschrijven, vinden we nieuwe vergelijkingen. In deze vergelijkingen zit geen tijdafhankelijkheid meer. Waar we in (5.1) met onbekende functies te maken hadden, krijgen we nu onbekende getallen α en ω^2:

$$-m\omega^2 = -2K + K\alpha, \tag{5.3a}$$
$$-m\omega^2\alpha = K - 2K\alpha. \tag{5.3b}$$

We hebben al eerder gezien dat het gebruik van probeerfuncties, differentiaalvergelijkingen terugbrengt tot algebraïsche vergelijkingen. Het stelsel (5.3) is eenvoudig op te lossen:

$$\alpha_1 = 1 \qquad \omega_1^2 = \frac{K}{m} \tag{5.4a}$$
$$\alpha_2 = -1 \qquad \omega_2^2 = \frac{3K}{m} \tag{5.4b}$$

- Waarom treden A en ϕ niet als onbekenden op?

Substitutie van (5.4) in (5.2) levert de twee normaaltrillingen:

$$x_{a1}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad x_{b1}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{5.5a}$$
$$x_{a2}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad x_{b2}(t) = -\,A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{5.5b}$$

waarbij de *eigenhoekfrequenties* ω_1 en ω_2 gegeven worden door (5.4). De harmonische vormen

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{5.6a}$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{5.6b}$$

die de normaaltrillingen bepalen heten *normale coördinaten*.

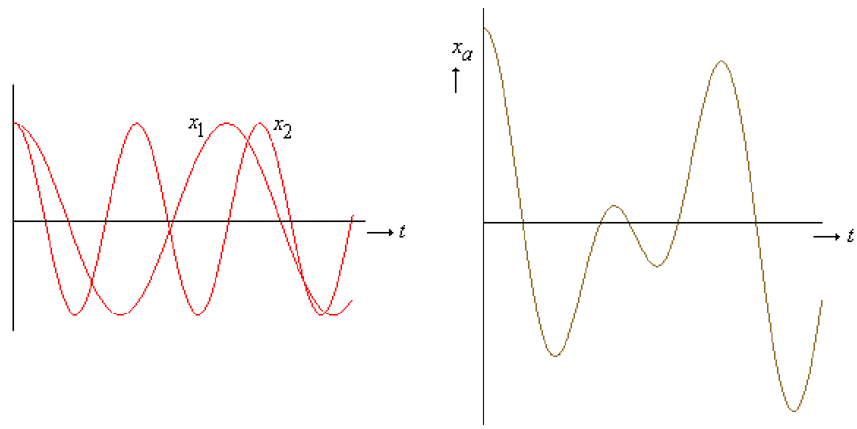
Uit (5.1) en (5.5) blijkt dat in normaaltrilling 1 ($x_b = x_a = x_1$) de koppelingsveer op beide massa's een extra kracht 0 uitoefent; in normaaltrilling 2 ($x_b = -\,x_a = -\,x_2$) extra krachten $-2Kx_a$ op massa a en $-2Kx_b$ op massa b.

- Verklaar waarom de eigenhoekfrequentie ω_0 van één enkele losgekoppelde oscillator ook als eigenhoekfrequentie ω_1 van de eerste normaaltrilling optreedt. Verklaar ook waarom ω_2 groter is dan ω_1.

superpositie van de normaaltrillingen De gedaante van de algemene oplossing $\{x_a(t), x_b(t)\}$ van (5.1) is een superpositie van de twee normaaltrillingen:

$$x_a(t) = x_{a1}(t) + x_{a2}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \tag{5.7a}$$
$$x_b(t) = x_{b1}(t) + x_{b2}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \tag{5.7b}$$

Figuur 5.2:



met ω_1 en ω_2 gegeven in (5.4). De parameters A_1, A_2, ϕ_1 en ϕ_2 worden bepaald door de beginuitwijkingen en beginsnelheden van de massa's a en b.

Als A_1 en A_2 beide niet 0 zijn variëren $x_a(t)$ en $x_b(t)$ niet harmonisch; in figuur 5.2 zijn als voorbeeld $x_1(t)$, $x_2(t)$ en $x_a(t)$ uitgezet voor het geval dat $A_1 = A_2$ en $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

- Is $x_a(t)$ periodiek?

ontkoppeling van de bewegingsvergelijkingen We herschrijven (5.7) nog eens als

$$x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{5.8a}$$
$$x_b(t) = x_1(t) - x_2(t) \tag{5.8b}$$

en lossen dit op naar x_1 en x_2:

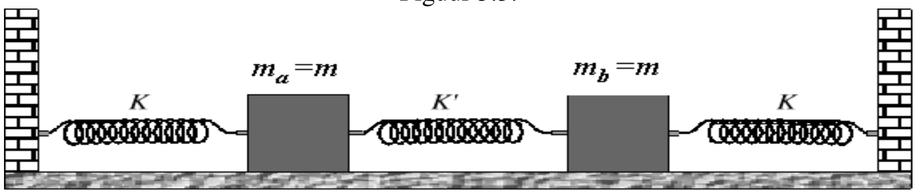
$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left[x_a(t) + x_b(t)\right] \tag{5.9a}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left[x_a(t) - x_b(t)\right] \tag{5.9b}$$

De normale coördinaten $x_1(t)$ en $x_2(t)$ zijn dus lineaire combinaties van de uitwijkingen $x_a(t)$ en $x_b(t)$. Volgens (5.6) en (5.4) zijn deze lineaire combinaties oplossingen van de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1 = -\frac{K}{m}x_1 \tag{5.10a}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_2 = -\frac{3K}{m}x_2 \tag{5.10b}$$

Dit stelsel differentiaalvergelijkingen is, anders dan het stelsel (5.1), niet gekoppeld maar bestaat uit twee onafhankelijke, eenvoudig oplosbare vergelijkingen van het type (3.5) waaruit de eigenhoekfrequenties direct zijn af te lezen.

Figuur 5.3:



5.2.2 zwevingen

Bij een beweging die een superpositie is van twee harmonische trillingen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ waarvan de hoekfrequenties ω_1 en ω_2 relatief weinig verschillen ontstaan *zwevingen*: de resulterende beweging kan worden opgevat als een *gemoduleerde* harmonische trilling, waarbij de amplitude een langzame variatie bezit. Dit kan zich bijvoorbeeld voordoen bij zwak gekoppelde oscillatoren, maar speelt altijd een rol wanneer een oscillator oscilleert met twee dicht bij elkaar liggende frequenties.

twee zwak gekoppelde massa-veersystemen We vervangen in het systeem beschreven door (5.1) de middelste veer door een koppelingsveer met een veerconstante K', die we klein zullen kiezen ten opzichte van K (figuur 5.3). Hierdoor gaat (5.1) over in

$$m\frac{d^2x_a}{dt^2} = -Kx_a - K'(x_a - x_b) \tag{5.11a}$$

$$m\frac{d^2x_b}{dt^2} = -Kx_b - K'(x_b - x_a) \tag{5.11b}$$

Stel nu dat de beginvoorwaarden zodanig zijn dat de normaaltrillingen (5.5a) en (5.5b) even sterk aanwezig zijn, zodat $A_1 = A_2 = A$, en stel verder dat $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Dezelfde oplossingsmethode die we gebruikten voor het geval $K' = K$ geeft dan als oplossing

$$x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) \tag{5.12a}$$

$$x_b(t) = x_1(t) - x_2(t) = A\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t) \tag{5.12b}$$

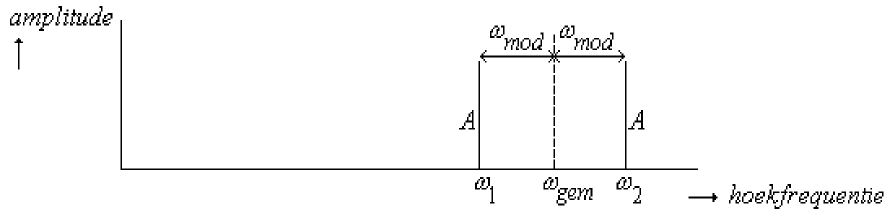
met in dit geval $\omega_1 = \sqrt{K/m}$ en $\omega_2 = \sqrt{(K + 2K')/m}$.

- Hoe moeten uitwijkingen en snelheden van de massa's a en b op het tijdstip $t = 0$ gekozen worden om hieraan te voldoen?

De eigenhoekfrequenties ω_1 en ω_2 verschillen relatief weinig als $K' \ll K$. In dat geval is het handig om een *gemiddelde hoekfrequentie* ω_{gem} en een *modulatiehoekfrequentie* ω_{mod} te definiëren:

$$\omega_{gem} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \quad \omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \tag{5.13a}$$

Figuur 5.4:



ofwel

$$\omega_1 = \omega_{gem} - \omega_{mod}, \quad \omega_2 = \omega_{gem} + \omega_{mod} \tag{5.13b}$$

waarbij dan dus $\omega_1 \simeq \omega_2$ en $\omega_{mod} \ll \omega_{gem}$. Ter illustratie is in figuur 5.4 het *amplitudespectrum* van de uitwijking (het 'signaal') $x_a(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$ getekend. Dit is een diagram waarin bij elke in het signaal optredende hoekfrequentie de bijbehorende amplitude als een verticaal lijnstukje is uitgezet.

Uit (5.12) en (5.13) volgt nu, met de substituties $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\beta\cos\alpha$ en $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\beta\sin\alpha$, dat de superposities $x_a(t)$ en $x_b(t)$ opgevat kunnen worden als trillingen met één hoekfrequentie ω_{gem}:

$$x_a(t) = 2A\cos\omega_{mod}t\cos\omega_{gem}t = A_{mod}(t)\cos\omega_{gem}t \tag{5.14a}$$

$$x_b(t) = 2A\sin\omega_{mod}t\sin\omega_{gem}t = B_{mod}(t)\sin\omega_{gem}t \tag{5.14b}$$

Hierin stellen $A_{mod}(t)$ en $B_{mod}(t)$ langzaam variërende 'amplitudes' voor (die echter wel negatieve waarden kunnen aannemen). Zie ook figuur 5.5, waarin $x_a(t)$ en $x_b(t)$ samen met de omhullenden $A_{mod}(t)$ en $B_{mod}(t)$ zijn uitgezet voor een geval met $\omega_2/\omega_1 = 1.3$: de massa's a en b voeren elk *zwevingen* uit. In elke modulatie passen twee zwevingen, zodat voor de zwevingshoekfrequentie ω_{zw} geldt:

$$\omega_{zw} = \frac{2\pi}{T_{zw}} = \frac{4\pi}{T_{mod}} = 2\omega_{mod} = \omega_2 - \omega_1 \tag{5.15}$$

Let op: de uitwijkingen $x_a(t)$ en $x_b(t)$ zelf zijn in het algemeen niet zuiver periodiek!

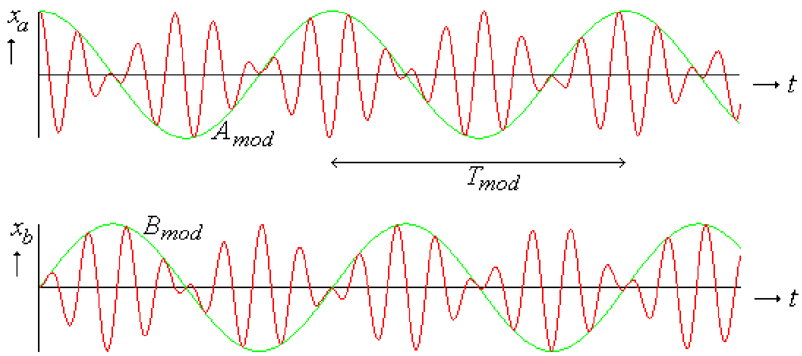
- Bereken uit $\omega_2/\omega_1 = 1.3$ de verhouding T_{mod}/T_{gem} en vergelijk dit met wat je uit figuur 5.5 afleest.
- Hoe verwacht je dat figuur 5.5 zal veranderen als K' groter gekozen wordt ten opzichte van K? En hoe als A_1 en A_2 onderling verschillend worden gekozen?

energiebeschouwing Voor $\omega_{mod} \ll \omega_{gem}$ is de *energie* $E = E_k + E_p$ van elk van de harmonisch gemoduleerde trillingen $x_a(t)$ en $x_b(t)$ uit (5.14) op ieder tijdstip bij benadering bepaald volgens (3.19):

$$E_a(t) \simeq \frac{1}{2}m\omega_{gem}^2 A_{mod}^2(t) = 2m\omega_{gem}^2 A^2\cos^2\omega_{mod}t \tag{5.16a}$$

$$E_b(t) \simeq \frac{1}{2}m\omega_{gem}^2 B_{mod}^2(t) = 2m\omega_{gem}^2 A^2\sin^2\omega_{mod}t \tag{5.16b}$$

Figuur 5.5:



Hieruit volgt dat $E_a(t)$ en $E_b(t)$ elk met frequentie $2f_{mod} = f_{zw}$ tussen 0 en $2m\omega_{gem}^2 A^2$ variëren, maar dat de totale energie van het systeem

$$E(t) = E_a(t) + E_b(t) = 2m\omega_{gem}^2 A^2 \tag{5.17}$$

constant is in de tijd. In het voorbeeld van twee identieke massa-veersystemen a en b met slappe koppelingsveer stroomt de totale energie kennelijk met de zwevingsfrequentie tussen a en b heen en weer, als beide normaaltrillingen even sterk aanwezig zijn.

5.3 MEER VRIJHEIDSGRADEN

In het voorgaande ging het over *twee* gekoppelde harmonische oscillatoren. De concepten die daarbij kwamen kijken, laten zich probleemloos generaliseren tot *meer* gekoppelde oscillatoren. De wiskunde wordt natuurlijk wel ingewikkelder. Maar die ingewikkelde wiskunde komt op heel veel plaatsen binnen en buiten de natuurkunde voor en het voorbeeld van de gekoppelde oscillatoren is heel geschikt om de oplossingsstrategie gebaseerd op matrices, eigenwaarden en eigenvectoren te volgen.

5.3.1 normaaltrillingen bij N gekoppelde oscillaties

Kenmerkend voor een normaaltrilling was dat alle deelnemende oscillatoren in fase en met dezelfde frequentie oscilleren. Lees de vorige zin rustig nog een keer. De probeerfunctie die we in de vorige sectie gebruikten, voldoet niet aan die eis: de gecombineerde aanwezigheid van plaats en tijd in het argument van de sinus, maakt dat voor elke oscillator de tijdafhankelijkheid verschillend is. Weliswaar is de frequentie voor elke oscillator hetzelfde, maar ze oscilleren toch niet in fase. De oplossing die we zo vonden, is dus geen normaaltrilling. We zijn nu op zoek naar functies als

$$x_n = A_n \cos(\omega t). \tag{5.18}$$

Alle tijdafhankelijkheden zijn nu hetzelfde, maar alle amplituden zijn allemaal verschillend. Wanneer we dit invullen in de bewegingsvergelijken 5.22, dan zien we dat, zoals gebruikelijk, de tijdafhankelijkheid eruit gewerkt kan worden: onze onbekende functies hebben allemaal dezelfde tijdafhankelijkheid. Differentiëren leidt tot ω^2 maal de oorspronkelijke functie. Alle $\cos(\omega t)$ factoren vallen weg en wat we overhouden is een stelsel algebraïsche vergelijkingen.

$$m\omega^2 A_n = KA_{n+1} - 2KA_n + KA_{n-1} \tag{5.19}$$

Wanneer we alle onbekende amplituden A_n in één vector A stoppen:

$$-m\omega^2 A = \begin{pmatrix} -2K & K & 0 & \dots & 0 \\ K & -2K & K & \dots & 0 \\ 0 & K & -2K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & K & -2K \end{pmatrix} A. \tag{5.20}$$

De vorige twee vergelijking vertellen precies hetzelfde: een onbekend getal $m\omega^2$ (onbekend vanwege ω) maal een onbekende vector A is gelijk aan een bekende matrix maal die onbekende A. Dit is het beroemde eigenwaarde probleem. De aanpak van dit wiskunde-probleem is een bekend resultaat uit de lineaire algebra. Samenvatting van die aanpak: werk alles naar één kant. Er staat dan matrix maal onbekende A is de nulvector. Dat probleem heeft natuurlijk als oplossing dat A ook de nulvector is. Andere oplossingen voor A zijn er alleen als de determinant van de matrix nul is, dus als

$$\begin{vmatrix} -2K + m\omega^2 & K & 0 & \dots & 0 \\ K & -2K + m\omega^2 & K & \dots & 0 \\ 0 & K & -2K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & K & -2K + m\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.21}$$

Dit leidt tot een N-de orde vergelijking voor ω^2. En zo vinden we de N onbekende normaalfrequenties. Bij elke keus van zo'n frequentie is vergelijking 5.20 oplosbaar. De oplossing is A, de vector van amplituden, waarbij elk element een amplitude is voor een oscillator. Eerder noemde we zo'n vector ook een normaaltrilling. In de wiskunde heet dit een eigenvector. Het oorspronkelijk onbekende getal $m\omega^2$ heet de eigenwaarde. Voor ons is ω de frequentie waarbij gemeenschappelijke oscillatie in fase mogelijk is.

Voor het geval van $N = 2$ hebben we dit probleem al met de hand opgelost. Nu hebben we het gereedschap om het ook voor grotere systemen op te lossen. Het gebruik van computers wordt dan heel voor de hand liggend. Om te voorkomen dat de regie hierbij uit handen gegeven wordt, is het belangrijk om de eerste keer de uitwerking twee keer uit te voeren. Eerst door het bovenstaande recept uit te voeren. En vervolgens door directer om het antwoord te vragen.

De normaaltrilling zullen we later in dit vak tegen komen als de staande golf en nog later, buiten dit vak, als eigentoestand van een quantummechanisch systeem. De gevonden eigenwaarden, die direct gekoppeld was aan de collectieve frequentie van de normaaltrilling, steekt later de kop weer op als de energie van een eigentoestand.

5.3.2 N gekoppelde oscillatoren

De normaaltrilling kan gezien worden als de discrete versie van de staande golf. We gaan nu kijken naar de discrete versie van de lopende golf.

Een systeem van N gekoppelde oscillatoren heeft N vrijheidsgraden: er treden N uitwijkingen als variabele op. Ook in dit algemenere geval kunnen we normaaltrillingen vinden, precies N verschillende. Elke normaaltrilling heeft een kenmerkende eigenfrequentie (in vrijwel alle gevallen verschillen de N eigenfrequenties van elkaar). Bij elke normaaltrilling horen $N-1$ vaste verhoudingen tussen de N verschillende uitwijkingen. Ongeacht het aantal oscillatoren blijft de kenmerkende eigenschap van normaaltrillingen dat alle oscillatoren in fase met elkaar oscilleren en dus ook allemaal met dezelfde frequentie. Voordat we naar de normaaltrillingen gaan zoeken (waarvan we later zullen zien dat ze verwant zijn aan staande golven) gaan we eerst op zoek naar de oplossingen die verwant zijn aan lopende golven.

5.3.3 zeer veel gekoppelde oscillatoren: longitudinale oscillaties

Als het aantal oscillatoren N zeer groot wordt, wordt het in het algemeen steeds lastiger om “met de hand” alle oplossingen bij te houden. Het wordt dan steeds aantrekkelijker om de computer te gebruiken om het gedrag van de oscillatoren te bestuderen en te visualiseren. Daarvoor moeten dan wel de basis(differentiaal)vergelijkingen worden opgesteld, en de randvoorwaarden geformuleerd. Dat doen we hier. Verder geven we een specifieke oplossing van de differentiaalvergelijkingen. Door invullen kan weer gedemonstreerd worden dat dit inderdaad een oplossing is.

de differentiaalvergelijkingen voor een rij gekoppelde oscillatoren In deze sectie willen we kijken naar het geval dat heel veel massa’s met veren aan elkaar zijn verbonden. De massa’s oscilleren in de lengterichting van de gespannen veren (zogenaamde *longitudinale* oscillaties). De versnelling die, bijvoorbeeld, massa nummer n ondervindt, wordt als altijd bepaald door de krachten op deze massa. En die krachten worden bepaald door de uitwijkingen van de twee veren die aan deze massa vastzitten. En die worden, behalve door de uitwijking van massa nummer n bepaald door de positie van zijn twee buren, de massa’s $n-1$ en $n+1$. De bewegingsvergelijking voor massa nummer n wordt

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = -K(x_n - x_{n-1}) - K(x_n - x_{n+1}) \tag{5.22}$$

Het is geruststellend om te zien dat de vergelijkingen niet ingewikkelder worden als we meer massa’s hebben. Elke massa voelt via de twee veren alleen de uitwijkingen van de directe buren. Elke massa wordt door precies dezelfde vergelijking beschreven. Dat alle antwoorden voor de verschillende massa's anders zijn, komt omdat de beginvoorwaarden voor alle massa's anders zijn. Maar we krijgen natuurlijk met een toenemend aantal massa's en veren ook met een toenemend aantal vergelijkingen te doen.

de massa's aan de rand Het is duidelijk dat er aan de uiteinden een probleem ontstaat: de bovenstaande vergelijking geeft een oplossing voor de beweging van een deeltje, in termen van zijn buren. Maar de uiteinden hebben aan één kant geen buren. Dus de beweging van de eerste en de laatste massa moeten we voorschrijven. Het eerste deeltje vormt de bron van wat er gebeurt; het laatste deeltje bepaalt de reflectie-eigenschappen.

oplossingen van de vergelijkingen De strategie, die we steeds volgden bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen, gebruiken we nu weer: kom met een probeerfunctie, die kans maakt om een oplossing te zijn en bouw wat vrijheden in, die door de differentiaalvergelijking kunnen worden ingeperkt. Voor onze N gekoppelde vergelijkingen zijn

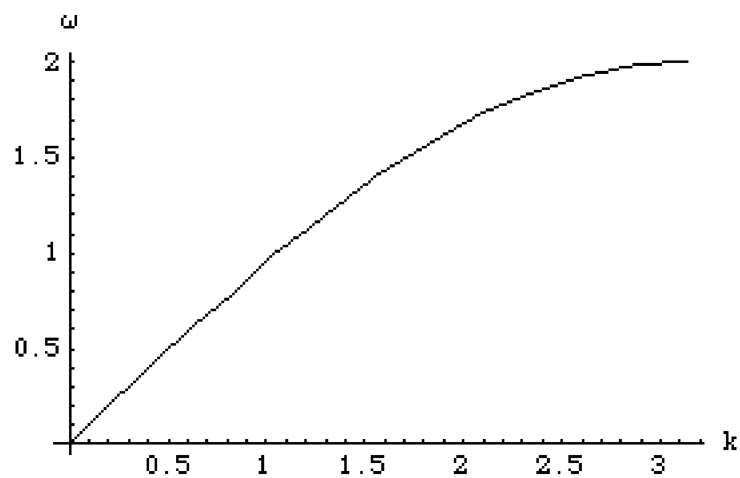
$$A\sin(\omega t - nkd) \tag{5.23}$$

N probeersels, met $n = 1, ..., N$. De combinatie nd geeft de plaatscoördinaat van oscillator nummer n, d is de afstand tussen de evenwichtsposities van de massa's. Het probeeraspect zit in k. Gezien de dimensie van nd, lengte, is de eenheid van k blijkbaar $1/$meter. In de bovenstaande uitdrukking kunnen we ook zien dat k precies dezelfde rol speelt in de plaats, die ω speelt in de tijd. Het invullen van dit probeersel in de differentiaalvergelijking, die de beweging van massa nummer n beschrijft, leidt, na wat rekenwerk, tot de volgende inperking:

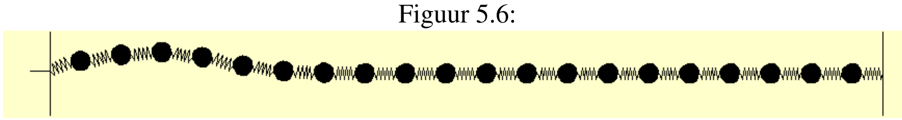
$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}}\sin\left(\frac{1}{2}kd\right) \tag{5.24}$$

Een prachtig resultaat! Het geeft het verband tussen de periodiciteit in de tijd, ω, en de periodiciteit in de plaats, k. Zo'n verband heet een dispersie-relatie en speelt in veel takken van de natuurkunde een belangrijke rol. Dit onderwerp komt verder aan de orde in hoofdstuk 7.

de randvoorwaarden In een eerder stadium waren we tegen het probleem aangelopen dat de eerste en de laatse massa van de string niet door de differentiaalvergelijkingen beschreven werden. Door de eerste massa een voorgeschreven beweging te geven, werd deze massa de bron van het geheel. Bij de laatste massa zijn we nog niet verder gekomen dan het idee om de uitwijking op 0 te zetten. Een alternatief is om aan te nemen dat niet de uitwijking 0 is maar de plaatsafgeleide van de uitwijking. Beide aanpakken zijn in strijd met onze probeerfunctie $A\sin(\omega t - Nkd)$. Een derde keus voor het laatste punt is de uitwijking zo te kiezen dat alle andere massa's helemaal niet door hebben dat de laatste massa werkelijk de laatste is. Dus dat de laatste massa beweegt alsof de string nog veel langer is. De probeerfunctie geeft aan dat de beweging van een massa hetzelfde is als van de (linker)buur massa kd/ω seconde eerder. Deze



Figuur 5.6:



eis dat andere massa's niet weten dat er een laatste massa is, is mooier verwoord als anti-reflectie. Het vastpinnen van de uitwijking, of van de afgeleide van de uitwijking leidt juist tot 100% reflectie.

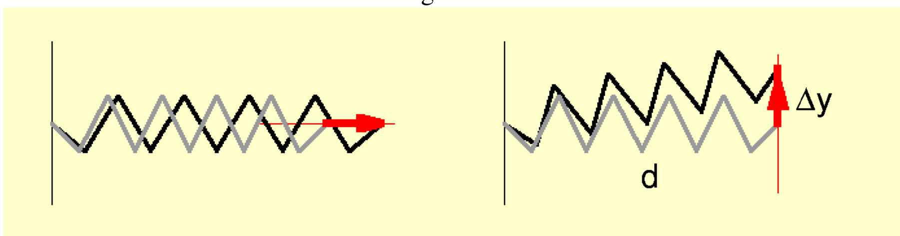
5.3.4 transversale oscillaties

De beweging van één harmonische oscillator is zo inzichtelijk dat we de uitwijking direct in een grafiek kunnnen geven, zonder dat we de oscillatie zelf visualiseren. Het is goed om in de gaten te houden dat de uitwijkingen van alle massa's hierboven gebeurde langs de lijn waarmee alle massa's via veren met elkaar waren verbonden. Het waren longitudinale uitwijkingen, net als bij geluid (al zijn de massa's en de veren hierboven nog discreet).

Is het mogelijk om ook het gevoelsmatig meer voor de hand liggende gevallen van transversale uitwijkingen te beschrijven, bijvoorbeeld zoals in bijstaande figuur?

We gaan er nu vanuit dat de massa's alleen verticaal kunnen bewegen. Omdat de uitwijkingen nu loodrecht staan op de lijn, gevormd door alle massa's en veren in evenwicht, noemen we de uitwijking y. Elke massa n heeft weer zijn eigen uitwijking y_n. Opnieuw hangen de krachten, die op massa n worden uitgeoefend af van de directe buren. Het zal blijken dat de resulterende vergelijkingen sprekend lijken op het longitudinale geval, maar het mechanisme er achter is totaal anders. In het longitudinale geval ontstaan de krachten op de massa's omdat de twee veren eromheen langer of korter worden. In het transversale geval blijft, ook wanneer de massa's een uitwijking hebben, de lengte van de veren in heel goede benadering ongewijzigd. En daarmee de grootte van krachten ook! Wat er bij een transversale uitwijking wel verandert, is dat

Figuur 5.7:



de veren wat schuin gaan trekken. Daarmee krijgt de spankracht ook een transversale component. Deze transversale component is de terugdrijvende kracht voor de harmonische oscillator. Zie ook de schets in Figuur 5.7, met links het longitudinale geval en rechts het transversale geval. De veren hebben elk een lengte (in evenwicht) d.

In het transversale geval staan alle veren op spanning: F. Dit is de kracht die je uit zou moeten oefenen op de twee uiteinden die je krijgt als je een veer door zou knippen. De genoemde d is de lengte terwijl ze onder spanning staan. De onbelaste lengte doet er niet toe. De component van de kracht in de verticale richting F_y wordt gegeven door

$$F_y \approx F\frac{\Delta y}{d}, \tag{5.25}$$

met Δy de verticale uitwijking van de veer. De benadering van (5.25) is goed zolang we aannemen dat de veer nog ongeveer horizontaal staat. Dat wil zeggen: we nemen aan dat Δy, de verticale uitwijking van de veer, veel kleiner is dan de lengte van de veer, ($\approx d$); dus $\Delta y \ll d$, zodat termen evenredig met $(\Delta y/d)^2$ te verwaarlozen zijn. Als we aannemen dat de grootte van de kracht altijd constant is, onafhankelijk van de uitwijking van de massa's, dan is de verticale component direct te zien uit het verschil in uitwijking van een massa met zijn buren. De linker veer geeft

$$F\frac{y_{n-1}-y_n}{d}$$

en de rechter veer trekt aan de massa met een verticale component:

$$F\frac{y_{n+1}-y_n}{d}$$

Dit leidt voor elke massa tot de volgende bewegingsvergelijking

$$m\ddot{y}_n(t) = \frac{F}{d}\left[(y_{n-1}(t)-y_n(t)) + (y_{n+1}(t)-y_n(t)\right] \tag{5.26}$$

We kunnen nu goed zien wat het drijvende mechanisme is. Het scheefstaan van de veren leidt tot een kracht in de richting die er toe doet. Het verschil in scheefheid tussen de linker en de rechter veer bepaalt de netto kracht op een massa. Natuurlijk wordt door dat scheefstaan de veer een beetje uitgerekt. Maar dat is een tweede-orde effect dat we hier verwaarlozen. In het longitudinale geval was de induwing/uitrekking van veren helemaal geen verwaarloosbaar effect: daar was het volledig bepalend voor de dynamica.

Leggen we de differentiaalvergelijkingen voor de transversale oscillaties (5.26) naast die van de longitudinale oscillaties (5.22), dan blijken ze identiek te zijn, met F/d (transversaal) in plaats van K (longitudinaal). Als oplossing voor (5.26) vinden we dus, zie (5.24),

$$\omega = \sqrt{\frac{4F}{md}} \sin\left(\frac{1}{2}kd\right) \tag{5.27}$$

5.3.5 Nabeschouwing

Dit hoofdstuk heeft onverwacht veel zaken bij elkaar gebracht, waarvan sommige al genoemd zijn. De zwakke koppeling tussen twee harmonische oscillatoren leidde tot een langzame zweving van de energie van de ene naar de andere oscillator. Niet altijd zijn oscillatoren gemakkelijk te herkennen. Het kan zomaar gebeuren dat de zweving de enige oscillatie is die in het spel lijkt. De frequenties van de eigenlijke oscillatoren kunnen veel te hoog zijn om waar te nemen.

Het idee om het onderwerp van twee gekoppelde oscillatoren uit te breiden tot heel veel, lijkt op het eerste gezicht weinig aantrekkelijk. Misschien was de verwachting: hetzelfde, maar dan heel ingewikkeld. Maar het resultaat van N gekoppelde oscillatoren was zowel verrassend als eenvoudig. Verrassend omdat onaangekondigd de golven zich aandienden. Eenvoudig omdat de bewegingsvergelijkingen niet ingewikkelder werden toen het aantal oscillatoren toenam.

Tenslotte bleek er een direct verband te bestaan tussen belangrijke concepten uit de lineaire algebra en gekoppelde oscillatoren: een eigenvector beschrijft de uitwijkingen van de oscillatoren en de eigenwaarde bepaalt de collectieve frequentie. In het vervolg zal blijken dat dit de discrete versie van een staande golf en de discrete, klassieke versie van een quantummechanische eigentoestand.

5.4 SAMENVATTING

1. Een rij van N gekoppelde harmonische oscillatoren heeft (eventueel: voor de betreffende coördinaatrichting) N vrijheidsgraden: er treden N uitwijkingen als variabele op.

2. Voor het geval dat $N = 2$ hebben we gezien dat er ook 2 verschillende (eventueel: longitudinale of overeenkomstige transversale) bewegingstoestanden bestaan waarin beide oscillatoren in fase of in tegenfase harmonisch bewegen. Deze toestanden heten normaaltrillingen.

3. Elke normaaltrilling heeft een kenmerkende eigenfrequentie en een kenmerkende vaste verhoudingen tussen de uitwijkingen van de oscillatoren. Voor N gekoppelde oscillatoren zijn er N verschillende normaaltrillingen met N (over het algemeen) verschillende frequenties. Bij elke normaaltrilling horen $N - 1$ vaste verhoudingen tussen de N verschillende uitwijkingen. Er is geen (of π) faseverschil tussen de verschillende uitwijkingen.

4. Bij 2 gekoppelde oscillatoren treden er zwevingen op als de eigenfrequenties van de twee normaaltrillingen relatief weinig verschillen. Voor identieke oscillatoren is dit het geval bij zwakke koppeling.

   Bij even sterke normaaltrillingen is de frequentie van de afzonderlijke oscillaties binnen een zweving het gemiddelde van de twee samenstellende frequenties:

   $$f_{gem} = \frac{1}{2}(f_2 + f_1) \tag{5.13a}$$

   De frequentie van de zwevingen als geheel is het dubbele van de modulatiefrequentie, en tevens het verschil van de twee samenstellende frequenties:

   $$f_{zw} = 2f_{mod} = f_2 - f_1 \tag{5.15}$$

   Deze zwevingsfrequentie is ook de frequentie waarmee de energie van elke oscillator afzonderlijk varieert.

5. Bij een string van N oscillatoren die aan één kant wordt gedreven als $A\sin(\omega t)$, heeft de n^{de} massa een uitwijking

   $$A\sin(\omega t - nkd) \tag{5.23}$$

   waarbij de zogenaamde k-vector gegeven wordt door de dispersierelatie (het verband tussen ω en k)

   $$\omega = \sqrt{\frac{4F}{md}}\sin(\frac{1}{2}kd) \tag{5.27}$$

   voor het transversale geval, en voor het longitudinale geval

   $$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}}\sin(\frac{1}{2}kd) \tag{5.24}$$

   De hoekfrequentie ω en de amplitude A worden bepaald door de bron.

Hoofdstuk 6

FOURIERANALYSE

6.1 INLEIDING

Hoe vluchtig de lezer ook op dit punt is aangeland, het valt niet te ontkennen dat van alle mogelijke wiskundige functies de sinus en de cosinus het verhaal hebben gedomineerd. En in het kielzog daarvan alle lineaire combinaties, waar de e-macht een bijzonder voorbeeld van is. In dit hoofdstuk zullen we zien waarom dat zo is en waarom het niet erg is dat de sinus en de cosinus deze dominante rol spelen. Het antwoord zal zijn dat een willekeurige periodieke functie geschreven kan worden als een reeks van sinus en cosinus functies. Het recept hiervoor is het belangrijkste onderdeel van dit hoofdstuk.

6.2 FOURIERREEKSEN

Als inleiding eerst het concept basis. We kunnen een vector beschrijven als de som van een veelvoud van de x-vector, een factor maal een y-vector en een veelvoud van een z-vector. De x-, y- en z-vector vormen hier een basis. Hoe rijker het fenomeen is wat we willen opspannen met basisvectoren, hoe lastiger dit wordt. We gaan hier de basis geven om alle periodieke functies mee op te bouwen. De wiskundige had hier nu ook eventueel aanvullende eisen aan die functies willen zien. Vanuit het optiek van de fysicus: voldoende glad. Discontinuïteiten mogen, maar niet oneindig veel en niet oneindig groot. Om nu aan de gang te kunnen, zijn er twee zaken nodig: basisfuncties en een criterium dat beschrijft hoe goed twee functies op elkaar lijken. Bij vectoren was dat criterium het in-product. Het beschrijft met een getal hoe goed twee vectoren 'op elkaar lijken'. Naar analogie met het vector-inproduct moet er nu een in-product voor periodieke functies worden gedefinieerd. Het in-product van $f = \{f_x, f_y, f_z\}$ en $g = \{g_x, g_y, g_z\}$ is

$$f.g = f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = \sum_{i=x}^{z} f_i g_i. \tag{6.1}$$

Waar een vector maar drie componenten heeft, zijn er voor een functie wel heel veel mogelijke keuzen voor het argument. De som van drie bijdragen wordt nu een integraal van allebei bijdragen

$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt. \tag{6.2}$$

Zie hier de generalisatie van het in-product en de introductie van een maat hoe twee functies op elkaar lijken. Er wordt alleen naar functiewaarden op het interval $-\pi$ tot π gekeken. De functies die we gaan bekijken, worden geacht periodiek te zijn met een 'trillingstijd' 2π. Het woord trillingstijd staat tussen aanhalingstekens omdat onze variabele t helemaal geen tijd hoeft te zien. Als de periode maar 2π is.

Met dit gereedschap kunnen we op zoek naar een orthonormale basis. Voor de hand liggende basisfuncties zijn $\sin(t)$ en $\cos(t)$. Wat is de overlap met zichzelf:

$$< \sin(t), \sin(t) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\, dt = 1. \tag{6.3}$$

De overlap is precies 1. Om die reden staat de factor $1/\pi$ in de definitie 6.2. We kunnen de integraal in 6.3 uit ons hoofd doen: gemiddeld over een periode is de functie $\sin^2(t)$ gelijk aan 1/2. En de lengte van het integratie-interval is 2π. Omdat de integrant gemiddeld 1/2 is, is de voorfactor niet $1/(2\pi)$ maar dubbele ervan.

Ook $\cos(t)$ heeft overlap 1 met zichzelf. En voor een orthonormale basis is het natuurlijk ook nodig dat de basisfuncties geen overlap met elkaar hebben ('loodrecht op elkaar staan'). Dat is het geval met $\sin(t)$ en $\cos(t)$

$$< \sin(t), \cos(t) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt = 0. \tag{6.4}$$

(Ook dat hadden we uit het hoofd kunnen zien. De integrant is evenredig met $\sin(2t)$ en die oscilleert een geheel aantal perioden rond nul.) Dit is een wel heel bescheiden basis. We hebben meer basisfuncties nodig. Maar elke nieuwe basisfunctie moet overlap 1 hebben met zichzelf (in analogie met de vectoren zouden we kunnen zeggen dat de lengte of de norm van de functie 1 is) en hij moet loodrecht staan op alle eerder gevonden basisfuncties. Voor de hand liggende kandidaten zijn $\sin(nt)$ en $\cos(nt)$. Als n een geheel getal groter dan 1 is, dan zijn ze allemaal periodiek op het interval 2π (ook op het interval $2\pi/n$, maar dat doet aan de waarheid van de zin niks af). Ze hebben ook allemaal de goede lengte:

$$< \sin(nt), \sin(nt) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(nt)\, dt = 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6.5a}$$

$$< \cos(nt), \cos(nt) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(nt)\, dt = 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6.5b}$$

en ze staan allemaal loodrecht op elkaar:

$$< \sin(nt), \sin(mt) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\, dt = 0 \quad \text{met } n \neq m \text{ en } \{n, m\} \in \mathbb{N} \tag{6.6a}$$

$$< \cos(nt), \cos(mt) >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \quad \text{met } n \neq m \text{ en } \{n,m\} \in \mathbb{N} \tag{6.6b}$$

$$< \sin(nt), \cos(mt) >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \quad \text{met } \{n,m\} \in \mathbb{N} \tag{6.6c}$$

Het aantal basisfuncties is nu gestegen van 2 naar ∞. Gewapend met het gereedschap van het in-product (hoe goed lijken twee periodieke functies op elkaar?) en de basisfuncties $\{\cos(nt), \sin(nt)\}$ kunnen we nu twee dingen doen:

1. Een willekeurige periodieke functie splitsen in zijn basisfuncties. Dit heet analyse.

2. Uit basisfuncties een willekeurige periodieke functie opbouwen. Dit heet synthese.

Voor we ons resultaat kunnen geven, moet er nog een schoonheidsfoutje worden weggewerkt. Grappig genoeg bij de allereenvoudigste basisfunctie $\cos(0t) = 1$. Deze is niet zo handig als basisfunctie want in tegenstelling tot alle andere sin's en cos'en is de gemiddelde waarde van het kwadraat van deze niet 1/2 maar 1. En daarmee is de 'lengte van deze functie', de norm, niet 1 maar $\sqrt{2}$. Daar valt mee te werken, maar het is gekunsteld en foutgevoelig. De boekhouding van de gemiddelde waarde van een functie gebeurt daarom apart.

Na al dit zaaiwerk, komt nu de oogst, eerst heel abstract: Een arbitraire, periodieke functie f(t) met periode 2π kan gesplitst worden in (of opgebouwd worden uit) basistoestanden:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \tag{6.7}$$

Hierin zijn $\cos(nt)$ en $\sin(nt)$ de basistoestanden en a_n en b_n de mate waarin deze basistoestanden bijdragen aan de bouw van de oorspronkelijke functie. Deze weegfactoren volgen uit de definitie van 'op elkaar lijken'

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \tag{6.8a}$$

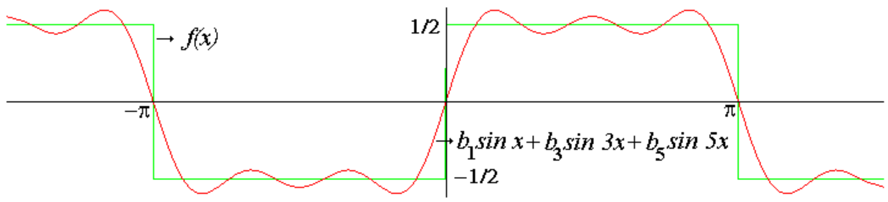
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad (n \geq 1 \text{ and } n \in \mathbb{N}) \tag{6.8b}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \quad (n \geq 1 \text{ and } n \in \mathbb{N}) \tag{6.8c}$$

voorbeeld: een blokfunctie Als concreet voorbeeld kunnen we kijken hoe de oneven blokfunctie (lelijk maar duidelijk omschreven als $\text{sign}(\sin(x))/2$) is opgebouwd (figuur 6.1):

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \text{ heeft periode } 2\pi \\ f(x) = -\frac{1}{2} \;\; (-\pi < x \leq 0) \\ f(x) = \frac{1}{2} \;\; (0 < x \leq \pi) \end{array} \right\} \tag{6.9}$$

Figuur 6.1:



Dit levert met (6.8): $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 0$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = 0$ en $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin nx\ dx$, dus

$$
\begin{aligned}
b_n &= 0 \text{ (even } n) \text{ en } b_n = \frac{2}{n\pi} \text{ (oneven } n) \text{ dus} \\
f(x) &= \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + ...) \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

Aan de opbouw van deze blokfunctie doen oneindig veel sinussen mee. We hebben ons hier beperkt tot de drie met de grootste weegfactor. In figuur 6.1 is te zien dat het resultaat al aardig is. Zeker omdat onze voorbeeldfunctie discontinuïteiten heeft. Wie een grotere overeenkomst wil, kan meer basisfuncties toevoegen. Het leuke hierbij is dat de weegfactoren van de al eerder uitgerekende basisfuncties niet veranderen. Dat komt omdat alle basisfunctie 'loodrecht op elkaar staan'.

symmetrie van een functie Een functie kan *even* of *oneven* zijn. Deze woorden klinken vertrouwd, maar de betekenis bij getallen is compleet anders dan bij functies. Een functie is bij definitie even als hij aan de volgende eigenschap voldoet

$$f(x) = f(-x) \qquad (6.11)$$

Zo'n functie is spiegelsymmetrisch rond de y-as (een lijn). Het oervoorbeeld van een even functie is de cosinus. Een functie kan ook oneven zijn:

$$f(x) = -f(-x) \qquad (6.12)$$

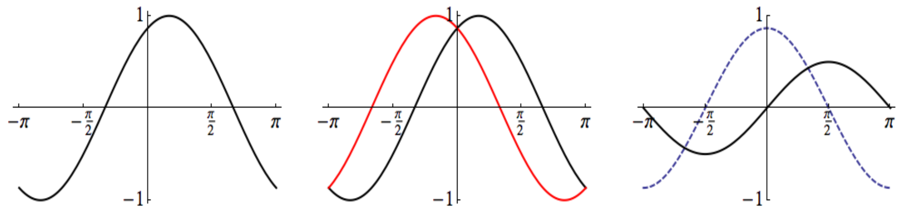
Zo'n functie is spiegelsymmetrisch rond de oorsprong (een punt). Hier is het oervoorbeeld de sinus. Een functie hoeft helemaal niet even of oneven te zijn. Maar elke functie is wel altijd op te spitsen in een even deel en een oneven deel. Het even deel is van $f(x)$ is

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad (6.13)$$

en het oneven deel is

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad (6.14)$$

Figuur 6.2:



Het is gemakkelijk te testen of het als even verkochte deel inderdaad even is: vervang x door $-x$ en check of er niets verandert. Hetzelfde voor het oneven deel: vervang x door $-x$ en check dat het resultaat van teken wisselt. Tenslotte is door directe optelling te zien dat de som van het even deel en het oneven deel de oorspronkelijke functie oplevert.

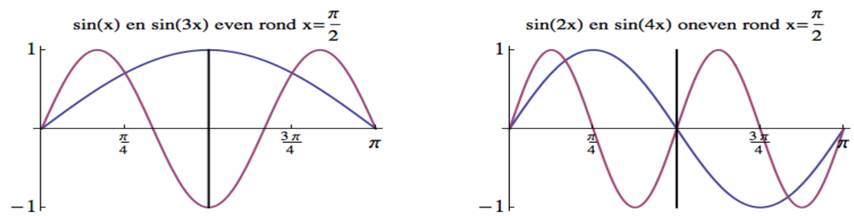
Zie, als voorbeeld, links in de figuur een functie $f(x)$. In de middelste figuur is in rood ook $f(-x)$ getekend. De helft van de som is het even deel van $f(x)$, de gestreepte functie rechts. En de helft van het verschil is het oneven deel van de functie, de getrokken lijn.

Waarom wordt het issue van even en oneven functies hier opgebracht? De som van allerlei even functies is opnieuw even en de som van allerlei oneven functies is opnieuw oneven. Deze kennis kan veel rekenwerk besparen. Als een functie even is, dragen er alleen cosinussen aan de opbouw van deze functie bij. Als een functie oneven is dan dragen er alleen sinussen aan bij. De eerste functie die we analyseerden was oneven. We hadden ons dus achteraf de moeite kunnen besparen om alle a_n coëfficiënten uit te rekenen, omdat we bij voorbaat wisten dat ze 0 waren. Dit gebruik van symmetrieargumenten is kenmerkend: vaak is het doel om iets zonder rekenwerk naar 0 te praten. Maar er is meer mogelijk. Wanneer we weten dat onze functie oneven is en $\sin(nt)$ ook, dan is het product van deze twee even. In plaats van de integraal uit te voeren over het interval $-\pi$ tot π, kunnen we ook van 0 tot π integreren en het resultaat verdubbelen. Op het interval 0 tot π is de blokfunctie vereenvoudigd tot de constante 1, wat het integreren natuurlijk gemakkelijker maakt. Wanneer we er achter gekomen zijn dat we in het geval van onze oneven functie alleen b_n hoeven uit te rekenen en we bovendien alleen op het interval 0 tot π hoeven te kijken, dan kan het symmetrie-argument opnieuw worden ingezet. Nu niet rond 0, maar rond $\pi/2$. Rond deze nieuwe as is onze functie even. De functies $\sin(nt)$ met even n zijn rond $\pi/2$ oneven en hun product met een even functie is dus ook oneven. Zo'n oneven integrant leidt tot een integraal 0. Dus van alle b_n hoeven we alleen die met oneven n uit te rekenen; de b_n met even n zijn op grond van symmetrie allemaal 0.

Figuur 6.3 laat rechts functies zien waarbij de integraal van 0 tot $\pi/2$ tegengesteld is aan de integraal van $\pi/2$ tot π en links waarbij de integralen juist gelijk zijn.

complexe notatie We hebben gezien dat een periodieke functie opgebouwd kan worden uit allerlei sinussen en cosinussen, allemaal met hun eigen weegfactor a_n of b_n. En ook zagen we dat de uitdrukkingen voor a_n en b_n sterk op elkaar leken. Dan ligt

Figuur 6.3:



de vraag voor de hand of al die sin's en cos'en gecombineerd kunnen worden tot e-machten. Het antwoord is: ja dat kan. Maar de eerlijkheid gebiedt te zeggen dat die prachtige winst die dat bij de eerdere hoofdstukken opleverde (de afgeleide van de functie is een veelvoud maal de functie zelf, terwijl bijvoorbeeld de afgeleide van een sin geen veelvoud maal een sin is) die is nu niet nodig.

Een complexe functie $f(t)$, die periodiek is met periode 2π kan gesplitst worden in zijn verschillende frequentiecomponenten:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(int) \tag{6.15}$$

Er zijn nu ook negatieve waarden voor n en gezien de uitdrukkingen van $\cos(t)$ en $\sin(t)$ in termen van $\exp(it)$ is dat niet verwonderlijk. Elke coëfficiënt c_n is alsvolgt gedefinieerd

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-int)\, dt \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6.16}$$

Ondanks het woord 'complex', ziet het resultaat er veel eenvoudiger uit. Wat bijvoorbeeld opvalt, is dat we de gemiddelde waarde (de $n = 0$ term) niet meer apart hoeven te definiëren. Dat is op twee manieren in te zien. Ten eerste zorgen de negatieve waarde van n voor een extra factor 2, die bij $n = 0$ ontbreekt; ten tweede is de amplitude van de oscillatie $\exp(int)$ altijd 1, ongeacht de frequentie, zelfs voor frequentie nul.

6.3 CONSEQUENTIES EN TOEPASSINGEN

andere periode dan 2π We hebben nu gereedschap in handen om functies die periodiek zijn met periode 2π te ontrafelen in sinussen en cosinussen. Maar het kan natuurlijk ook voorkomen dat een functie wel periodiek is, maar een andere periode heeft. Ook is direct duidelijk dat, hoewel er steeds t of x als variabele gebruikt is, er geen speciale eigenschappen van t of x gebruikt zijn. De variabele kan dus ook door andere worden vervangen. In de praktijk zijn het periodieke functies van de tijd en van de plaats, die het meest voorkomen.

Een voorbeeld van een plaatsafhankelijke periodieke functie is $\sin kz$, die een periode λ heeft met $\lambda = 2\pi/k$. Een voorbeeld van een periodieke tijdsafhankelijke functie is $\sin \omega t$, die periode T heeft, met $T = 2\pi/\omega$. Invoeren van een nieuwe variabele, zeg

$x = \omega t$, geeft de functie weer de goede periode van 2π. In het eindresultaat kan dan overal x weer vervangen worden door ωt. In het geval van een periodieke functie $f(t)$ met periode T wordt 6.8b volgens dit recept:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \; (n \geq 1) \tag{6.17}$$

andere periodieke functies dan sin en cos Wat dit opsplitsen in sinussen en cosinussen vooral zo nuttig maakt is het superpositieprincipe. In hoofdstuk 4 is behandeld hoe een harmonische oscillator reageert op een externe kracht, die als cosinus van de tijd afhangt. Maar gewapend met het superpositieprincipe en met Fourierreeksen, kunnen we nu de respons uitrekenen van een harmonische oscillator op elke periodieke functie.

Het recept is dan als volgt: (i) ontbindt de periodieke drijvende kracht in de cosinus en sinus componenten volgens het recept van (6.7) en (6.8); (ii) reken de respons van de harmonische oscillator uit voor iedere afzonderlijke sinus en cosinus component; (iii) gebruik het superpositieprincipe en tel de verschillende responsen op om de respons op de oorspronkelijke periodieke kracht te vinden; (iv) tel daarbij eventueel nog een oplossing op van de homogene differentiaalvergelijking (dus zonder aandrijvende term) om aan de randvoorwaarden te voldoen.

energie in de twee domeinen We hebben gezien dat periodieke functies op twee manieren beschreven kunnen worden: als functie van de tijd en als functie van de frequentie. Beide beschrijving zijn equivalent. De inperking dat we alleen naar periodieke functies kijken, zorgt er in het tijdsdomein voor dat we ons tot één periode kunnen beperken. Buiten deze periode is geen nieuwe informatie te vinden. In het frequentiedomein blijkt onze inperking uit het feit dat we alleen maar een discrete reeks frequenties vinden die bijdragen aan de opbouw van het signaal en geen andere tussenliggende waarden.

Deze Fourier analyse van periodieke functies is een eerste stap op een lange weg, die we nu niet verder gaan volgen. De eerstvolgende voor de hand liggende stap zou zijn om de periode T oneindig groot te maken. De functie is dan niet meer periodiek in de tijd. De consequentie is dat de laagste frequentie, de grondfrequentie ω, oneindig laag wordt en het frequentieverschil tussen opeenvolgende hogere harmonische $n\omega$ oneindig klein wordt; ook als functie van de frequentie wordt het signaal continue.

Beide beschrijvingen, zowel als functie van de tijd als als functie van de plaats zijn limietgevallen. In de praktijk willen we vaak een combinatie. Het muzieknotenschrift is daar een mooi voorbeeld van. Een noot geeft zowel de toonhoogte (frequentie) als de timing aan. We weten nu al dat die frequentie niet oneindig goed kan vastliggen. Een signaal dat in het frequentiedomein uit één enkele frequentie bestaat, is in het tijdsdomein een harmonische oscillatie die altijd bestaan heeft en altijd zal blijven bestaan. Dat is de consequentie van periodiek zijn. Mocht dat niet waar zijn (grote kans hierop!) dan is die ene frequentie ook niet waar. Op de weg die we hier niet vervolgen, zouden we een verband tegenkomen tussen de precisie waarmee de frequentie bepaald kan worden (inperking bijdragende frequenties) en de precisie waarmee de tijdsresolutie bepaald kan worden (inperking van het tijdsinterval waarin de functie ongelijk nul is). Merk op: alles wat hier staat is klassiek, d.w.z. niet quantummechanisch.

6.4 SAMENVATTING

1. Een functie $f(x)$ met periode 2π kan ontwikkeld worden in een Fourierreeks

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6.7}$$

met coëfficiënten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{6.8a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n \geq 1) \tag{6.8b}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n \geq 1) \tag{6.8c}$$

2. De sinussen en cosinussen kunnen ook gecombineerd worden tot complexe e-machten. Dezelfde ontwikkeling als hierboven maar dan genoteerd met complexe e-machten als basis-functies:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(int) \tag{6.15}$$

met coëfficiënten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-int)\, dt \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{6.16}$$

Hoofdstuk 7

GOLVEN IN ÉÉN DIMENSIE

7.1 INLEIDING

Dit hoofdstuk begint met de *homogene snaar*. Dit systeem staat model voor golfsystemen zonder dispersie, een begrip dat later in dit hoofdstuk terugkomt. Uitgaande van het gedrag van een kralensnoer (een gespannen massaloos koord bezet met puntmassa's) wordt getoond dat de snaar moet voldoen aan de *klassieke golfvergelijking*, zie ook Giancoli ch 15. De staande golven in de snaar zijn (superposities van) normaaltrillingen die hiervan speciale oplossingen vormen.

Er wordt bekeken hoe *randvoorwaarden* het aantal oplossingen beperken. Ook de *energieverdeling* in de staande golven krijgt aandacht. Tenslotte wordt het verband tussen *golflengte en frequentie* voor de snaar vergeleken met dat voor het kralensnoer.

7.2 DE KLASSIEKE GOLFVERGELIJKING

Van kralensnoer naar snaar In hoofdstuk 5 zagen we transversale trillingen in een rij van N massa's, aaneengesnoerd door veren. De bewegingsvergelijking van een massa met willekeurig rangnummer n wordt gegeven door (zie (5.26))

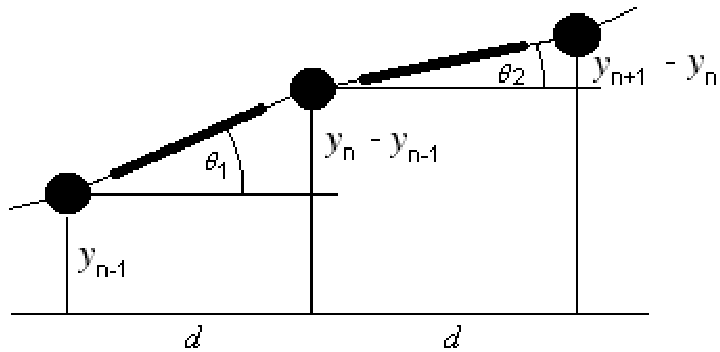
$$m\frac{d^2y_n}{dt^2} = \frac{F}{d}\left[(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})\right], \tag{7.1}$$

waarbij we de spankracht F genoemd hebben, de afstand tussen de massa's d is, en we de transversale uitwijkingen met y_n aanduiden. Het is hierbij niet van belang of de rij massa's tussen muren vastgehouden wordt: in (7.1) komen slechts de posities van de massa's $n-1$, n en $n+1$ voor.

- Ga in sectie 5.3 de betekenis van F en d na. Controleer het rechterlid van (7.1) door uit figuur 7.1 de netto terugdrijvende (transversale) kracht op massa n af te leiden.

Als N zeer groot wordt gekozen onstaat een systeem met een totale lengte veel groter dan d, dat vergelijkbaar wordt met een even lange, volkomen soepele homogene

Figuur 7.1:



snaar, waarvan de massa per lengte-eenheid constant is en gelijk aan $\mu = \frac{m}{d}$. We mogen dan verwachten dat voor lange golflengtes (veel langer dan d) de beweging sterk zal lijken op de beweging in de snaar met continu verdeelde massa.

Uitgaande van (7.1) kunnen we de bewegingsvergelijking voor de snaar opstellen. We schrijven daartoe (7.1) eerst nog als

$$\mu \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = \frac{F}{d} \cdot \frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{d} \tag{7.2}$$

Hier is $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$. Als d klein genoeg is kunnen we het differentiequotient aan de rechterkant van deze vergelijking schrijven met behulp van de afgeleide van y naar de coordinaat z langs de snaar:

$$\mu \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = \frac{F}{d} \cdot \frac{\partial \Delta y(z)}{\partial z}. \tag{7.3}$$

Als we nu nog een keer gebruiken dat d klein is kunnen we $\frac{\Delta y}{d}$ weer vervangen door een afgeleide naar z en vinden we voor de uitwijking $y(z,t)$ van de snaar:

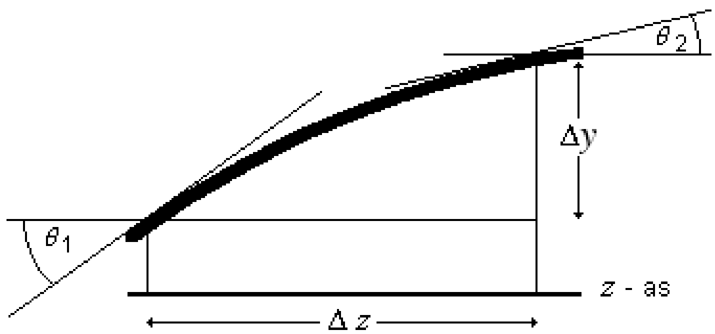
$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \tag{7.4}$$

We schrijven dit in de vorm

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}} \tag{7.5}$$

Deze partiële differentiaalvergelijking wordt de (ééndimensionale) *klassieke golfvergelijking* genoemd. Op de betekenis van de snelheid v komen we straks terug.

Figuur 7.2:



algemene oplossing van de golfvergelijking De uitwijking van de snaar hangt zowel af van de positie z en de tijd t. We nemen nu aan dat y een willekeurige funtie is van de combinatie $z - vt$ of (dit is equivalent) $t - \frac{z}{v}$. Dus:

$$y(z,t) = f_1(t - \frac{z}{v}). \tag{7.6}$$

- Laat zien dat (7.6) een oplossing is van de golfvergelijking (7.5), ongeacht welk functioneel verband we aannemen voor f_1.

Uitdrukking (7.6) beschrijft een uitwijking van de snaar die zich met snelheid v naar rechts beweegt zonder van vorm te veranderen. Een naar links bewegende golf wordt gegeven door:

$$y(z,t) = f_2(t + \frac{z}{v}). \tag{7.7}$$

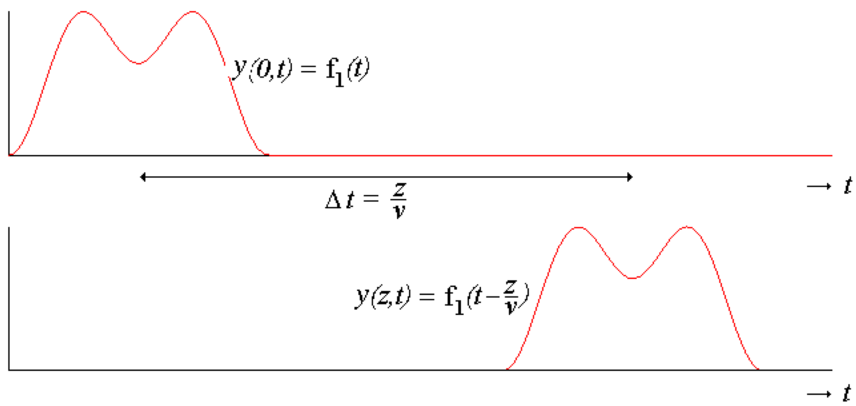
Wat we hebben gevonden is dat de transversale uitwijking $y(z,t)$ voldoet aan de klassieke golfvergelijking (7.5) dankzij het feit dat hij de gedaante (7.6) of (7.7) heeft. Let op: 'gedaante' betekent hier alleen dat er een voorschrift is over de manier waarop t en z in één variabele worden verenigd. Hoe de functies f_1 of f_2 er zelf uit zien is niet van belang; de verstoring kan bijvoorbeeld periodiek zijn, maar ook bijvoorbeeld een kortstondige, éénmalige verstoring is toegestaan (zie figuur 7.3).

De functie $y(z,t)$ stelt een *lopende golf* voor die in de snaar kan bestaan, en de snelheid v uit (7.5) kan geïdentifieerd worden met de *voortplantingssnelheid* van deze golf in de snaar.

We kunnen de naar rechts en de naar links lopende oplossingen combineren. De algemene oplossing van (7.5) te schrijven daarom te schrijven als

$$y(z,t) = y_1(0, t - \frac{z}{v}) + y_2(0, t + \frac{z}{v}) = \mathrm{f}_1(t - \frac{z}{v}) + \mathrm{f}_2(t + \frac{z}{v}) \tag{7.8}$$

Figuur 7.3:



waarin de functies f_1 en f_2 nog willekeurig mogen worden gekozen. Dit is dus een *superpositie* van twee even snel tegen elkaar in lopende transversale golven.

Een bijzonder geval van (7.8) is de *harmonische* lopende golf,

$$y(z,t) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{z}{v}\right) \tag{7.9}$$

Uiteraard kunnen we dit ook weer schrijven met de complexe notatie:

$$y(z,t) = Ae^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)} \tag{7.10}$$

7.2.1 staande golven

normaaltrillingen Om oplossingen van de golfvergelijking (7.5) te vinden die de vorm van normaaltrillingen hebben, substitueren we daarin (vergelijk (5.2)):

$$y(z,t) = f(z)\cos(\omega t + \phi) \tag{7.11}$$

zodat voor elke vaste waarde van z éénzelfde harmonische beweging ontstaat.

Merk op dat de variabelen z en t in (7.11) in verschillende factoren voorkomen. De factor $f(z)$ is een van z afhankelijke amplitude die de snaarvorm weergeeft op momenten dat $\cos(\omega t + \phi)$ maximaal is. Om $f(z)$ te vinden gaan we (7.11) tweemaal naar t en tweemaal naar z differentiëren:

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(z)\cos(\omega t + \phi) \tag{7.12a}$$

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} = \frac{d^2 f(z)}{dz^2}\cos(\omega t + \phi) \tag{7.12b}$$

We substitueren het resultaat in (7.5):

$$-\omega^2 f(z) = v^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \tag{7.13}$$

Het is nu handig een grootheid k in te voeren, die voldoet aan

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{7.14}$$

Invullen van (7.14) in (7.13) geeft

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + k^2 f(z) = 0 \tag{7.15}$$

Omdat deze vergelijking analoog is met (3.5), waarbij z de rol overneemt van t en k die van ω_0, is de oplossing direct te geven:

$$f(z) = a\cos kz + b\sin kz \tag{7.16}$$

zodat $f(z)$ sinusvormig van z afhangt. Combinatie van (7.11) en (7.16) geeft voor de zeer algemene gedaante van een normaaltrilling in een oneindig lange homogene snaar:

$$y(z,t) = (a\cos kz + b\sin kz)\cos(\omega t + \phi) \tag{7.17}$$

en dus hangt $y(z,t)$ sinusvormig af van zowel z als t.

We kunnen (7.17) ook vinden met behulp van ons favoriete gereedschap: de complexe notatie. We gaan uit van twee tegengesteld lopende golven met gelijke amplitude. Als we bij (7.10) en even grote term optellen die een naar links lopende complexe golf beschrijft hebben we:

$$y(z,t) = A[e^{i\omega\left(t - t_0 - \frac{z-z_0}{v}\right)} + e^{i\omega\left(t - t_0 + \frac{z-z_0}{v}\right)}]. \tag{7.18}$$

We hebben hier voor de algemeenheid de nulpunten van van de tijd (t_0) en de positie (z_0) expliciet meegenomen. We kunnen in (7.18) de tijdsafhankelijke term buiten haakjes halen:

$$y(z,t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}[e^{-i(kz - kz_0)} + e^{i(kz - kz_0)}]. \tag{7.19}$$

Hier is (7.14) gebruikt en de notatie:$\phi = -\omega t_0$. Uit (7.19) volgt met de notatie $\psi = -kz_0$:

$$y(z,t) = 2Ae^{i(\omega t + \phi)}\cos(kz + \psi). \tag{7.20}$$

Als we in deze laatste vergelijking het reële deel nemen van de complexe e-macht krijgen we een uitdrukking die equivalent is met (7.17). In (7.3) zullen we terug komen op het feit dat een staande golf altijd geschreven kan worden als de som van twee tegengesteld bewegende lopende golven met gelijke amplitude.

intermezzo, de k-vector De grootheid k heet de *golfvector* en stelt $2\pi\times$ het aantal golven per lengte-eenheid in de z-richting voor. Het is precies dezelfde k die we in sectie 5.3 al tegenkwamen. Noemen we de golflengte λ, dan geldt analoog aan (3.9):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{7.21}$$

Zoals we de trillingstijd op drie manieren kunnen aangeven

- de trillingstijd T
- de frequentie $f = \frac{1}{T}$
- de hoekfrequentie $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

zo kunnen we *op precies dezelfde manier* de golflengte op drie manieren aangeven

- de golflengte λ
- de inverse van de golflengte (het zogenaamde golfgetal, wordt niet zoveel meer gebruikt)
- de k-vector, zoals in (7.21).

In één dimensie is het woord *k-vector* wat overdreven en misschien zelfs wat verbazingwekkend, maar dat is nu eenmaal de naam die hier overal in de wereld voor wordt gebruikt. Bij golven in meer dan één dimensie wordt het vectorkarakter van k duidelijker. Deze golven in twee of drie dimensies komen in deze syllabus niet aan bod.

- Wat is de SI-eenheid voor k?
  Controleer dat $y(z + \lambda) = y(z)$ voor elke waarde van z.
- Leg uit dat in een normaaltrilling van een snaar die voldoet aan (7.4) de hoekfrequentie recht evenredig is met de golfvector.

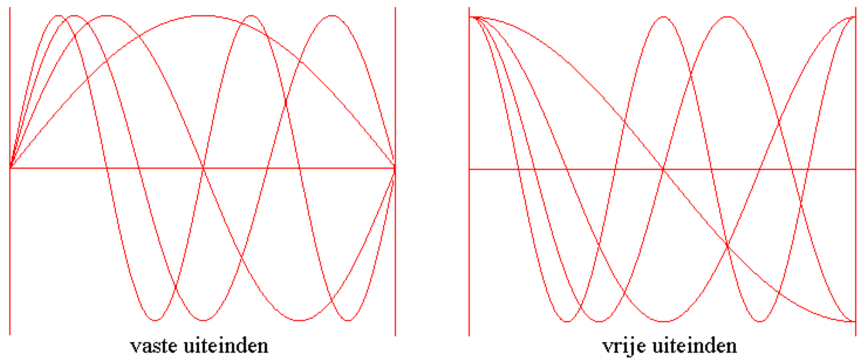
randvoorwaarden In (7.17) kunnen behalve ϕ ook de coëfficiënten a en b en de golfvector k nog vrij gekozen worden (ω ligt dan vast volgens (7.14)). Als de snaar echter op twee plaatsen (*vaste uiteinden*) wordt ingeklemd komen er *randvoorwaarden* die leiden tot *quantisatie*: slechts bepaalde waarden van k en ω zijn dan nog mogelijk en de plaatsen van *knopen* en *buiken* komen vast te liggen. We kunnen dit als volgt inzien.

Stel dat de snaar is ingeklemd op de posities $z = 0$ en $z = L$. De twee vaste uiteinden moeten knopen zijn en voldoen aan $y(0, t) = 0$ en $y(L, t) = 0$ voor alle waarden van t. Uit (7.17) lezen we dan achtereenvolgens af dat

$$y(0,t) = (a\cos k0 + b\sin k0)\cos(\omega t + \phi) = 0 \text{ (zodat } a = 0) \tag{7.22a}$$
$$y(L,t) = (0\cos kL + b\sin kL)\cos(\omega t + \phi) = 0 \text{ (zodat } \sin kL = 0) \tag{7.22b}$$

Met $n = 1, 2, \ldots$ worden dus oneindig veel waarden van k, λ en ω genummerd die voldoen aan

Figuur 7.4:



$$\left\{ \begin{array}{ccc} k_n L = n\pi & k_1 = \dfrac{\pi}{L} & k_n = nk_1 \\ \lambda_n = \dfrac{2\pi}{k_n} & \lambda_1 = 2L & \lambda_n = \dfrac{\lambda_1}{n} \\ \omega_n = vk_n & \omega_1 = \pi\dfrac{v}{L} & \omega_n = n\omega_1 \end{array} \right\} \tag{7.23}$$

Dat de waarden van k_n gehele veelvouden zijn van k_1 komt doordat in elke normaaltrilling een geheel aantal halve golflengten moet passen op L; dat ω_n ook steeds een geheel veelvoud is van de grondfrequentie ω_1 is minder vanzelfsprekend en wordt veroorzaakt doordat v in (7.14) een constante is.

De bijbehorende normaaltrillingen geven we nu uitgaande van (7.17) aan met

$$y_{n,vast}(z,t) = b_n \sin(nk_1 z)\cos(n\omega_1 t + \phi_n) \tag{7.24}$$

Er bestaan dus in de ingeklemde snaar nog steeds oneindig veel normaaltrillingen $y_n(z,t)$, maar het zijn er slechts *aftelbaar* veel (genummerd met rangnummer n).

In plaats van vaste hadden we ook *vrije uiteinden* kunnen eisen op de posities $z = 0$ en $z = L$. Dit moeten dan buiken zijn, die voor alle waarden van t voldoen aan $\left[\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right]_{z=0} = 0$ en $\left[\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right]_{z=L} = 0$.

Uitgaande van (7.17) krijgen we dan op soortgelijke manier de normaaltrillingen

$$y_{n,vrij}(z,t) = a_n \cos(nk_1 z)\cos(n\omega_1 t + \phi_n) \tag{7.25}$$

In figuur 7.4 zijn $y_{n,vast}(z,t)$ en $y_{n,vrij}(z,t)$ voor $n = 1$ tot en met $n = 4$ getekend tussen $z = 0$ en $z = L$, steeds voor een willekeurige waarde van t.

7.2.2 longitudinale golven

Al het voorgaande in dit hoofdstuk heeft betrekking op z.g. *transversale golven*. Dit zijn golven waarvan de uitwijking loodrecht staat op de voortplantingsrichting van de golf. Voorbeelden van dit soort golven zijn de trillingen in een gespannen snaar, maar ook b.v. electromagnetische golven zoals licht. We zijn hoofdstuk 5 begonnen door te kijken naar een rijtje massa verbonden door veren. Dit leidde to de discrete variant van wat we *longitudinale golven* hebben genoemd. Ook bij deze longitudinale golven kunnen we weer een continuumlimiet nemen. We krijgen weer dezelfde golfvergelijking die we eerder voor transversale golven vonden. Eigenlijk is alles hetzelfde, We hebben weer lopende en staande golven, we kunnen weer een k-vectore definieren etc. Er is één verschil: de uitwijking van de trilling is nu niet loodrecht op maar parallel aan de voortplantingsrichting van de golf. Het belangrijkste voorbeeld van een longitudinale golf is geluid. We verwijzen naar Giancoli (H16) voor de verdere behandeling van dit onderwerp.

7.3 SUPERPOSITIE VAN GOLVEN

superpositie van harmonische lopende golven Als eerste voorbeeld van superpositie nemen we in (7.8): $\mathrm{f}_1(t) = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t$ en f_2 is de nulfunctie. Dan is de oneindige, in de positieve z-richting lopende golf niet meer harmonisch:

$$y(z,t) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \tag{7.26}$$

Wel geldt hierbij volgens (7.14)

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} \tag{7.27}$$

Als tweede voorbeeld nemen we $\mathrm{f}_1(t) = \mathrm{f}_2(t) = A\cos\omega t$. Dit geeft een superpositie van twee even sterke tegen elkaar in lopende golven, die op twee equivalente manieren te schrijven is:

$$y(z,t) = A\cos(\omega t - kz) + A\cos(\omega t + kz) \tag{7.28a}$$

$$y(z,t) = 2A\cos kz \cos\omega t \tag{7.28b}$$

Het blijkt dat (7.28b) de vorm heeft van (7.17), en dus is de superpositie van deze lopende golven *equivalent met een staande golf-oplossing* zoals we die al eerder hebben gevonden.

staande golven: superpositie van normaaltrillingen De algemene oplossingen van (7.5) in de situaties met vaste of vrije uiteinden bestaan uit willekeurige superposities van de normaaltrillingen (7.24), respectievelijk (7.25):

$$\boxed{y_{n,vast}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nk_1 z)\cos(n\omega_1 t + \phi_n)} \tag{7.29a}$$

$$\boxed{y_{n,vrij}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nk_1 z)\cos(n\omega_1 t + \phi_n)} \tag{7.29b}$$

Deze superposities voldoen dus aan de golfvergelijking en kunnen als *staande golven* worden opgevat.

Het is duidelijk dat $y_{n,vast}(z,t)$ en $y_{n,vrij}(z,t)$ niet meer sinusvormig van z of t afhangen zodra twee of meer coëfficiënten b_n of a_n van 0 verschillen. In dat geval stellen de uitwijkingen in (7.29a) en (7.29b)voor een vaste waarde van t, willekeurige oneven, respectievelijk even Fourierreeksen in z voor. Tussen $z = 0$ en $z = L$ kan dus een *willekeurige snaarvorm* optreden.

7.4 REFLECTIE EN TRANSMISSIE

Als je 's avonds langs een winkelruit loopt dan zie je jezelf gespiegeld in die ruit. Kennelijk zorgt de overgang tussen twee transparante media (de lucht en het glas van de ruit) voor een gedeeltelijke reflectie van het licht. In het optica-deel van dit vak komen we terug op dit verschijnsel. Van belang hierbij is eigenlijk alleen het feit dat licht een golfverschijnsel is. Het blijkt dat gedeeltelijke reflectie en gedeeltelijke transmissie van een inkomende golf altijd plaatsvindt bij een overgang tussen twee media met verschillende voortplantingssnelheden voor die golven. We zullen dit fenomeen hier illustreren aan de hand van een simpel voorbeeld: een gespannen touw waarvan een helft een andere massa per lengte-eenheid (μ) heeft dan de andere.

Neem aan dat een oneindig lang koord met massa per lengte-eenheid μ_1, op positie $z = 0$ is vastgemaakt aan een tweede koord met massa per lengte-eenheid μ_2. Het eerste koord strekt zich uit tot $z = -\infty$, het tweede tot $z = \infty$. De spankracht in de touwen is F. Een naar rechts lopende golf in koord 1 zal gedeeltelijk worden doorgelaten naar koord 2 bij $z = 0$ (transmissie) en gedeeltelijk reflecteren. Het gereflectreerde deel loopt terug naar links in koord 1. Een en ander is weergegeven in figuur 7.5.

We nemen voor het gemak een van links inkomende golf met de volgende vorm ($z < 0$):

$$y_i(z,t) = A_i \cos(\omega t - k_i z). \tag{7.30}$$

Rechts van de verbinding ($z > 0$) plant zich een doorgelaten golf voort met de vorm:

$$y_t(z,t) = A_t \cos(\omega t - k_t z). \tag{7.31}$$

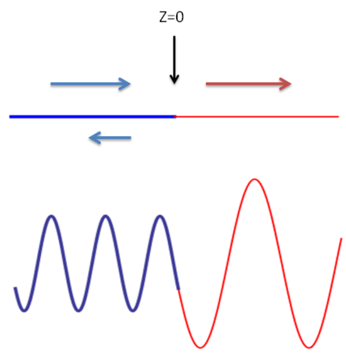
Voor $z < 0$ is er ook een gereflecteerde golf:

$$y_r(z,t) = A_r \cos(\omega t + k_i z). \tag{7.32}$$

Wellicht zou je in (7.32) een ander symbool (k_r) verwachten als in (7.30). De reden dat we hier toch k_i schrijven is dat beide golven door hetzelfde medium bewegen ($z < 0$). Omdat de gereflecteerde golf terug naar links beweegt hebben we in de laatste vergelijking een plus teken opgenomen. Er geldt dus $k_i = -k_r = \omega/v_1$, waarbij $v_1 = \sqrt{F/\mu_1}$ de voortplantingssnelheid in het linker touw is. Het rechter touw heeft een andere lineaire dichtheid en dus is de voortplantingssnelheid van de doorgelaten golf anders: $v_2 = \sqrt{F/\mu_2}$. In het rechtertouw geldt: $k_t = \omega/v_2$.

We kunnen voor de drie vergelijkingen een verband afleiden tussen de drie amplitudes. We geven hier alleen het resultaat, in opgave 7.2 van het werkboek wordt dit

Figuur 7.5: *In het bovenste plaatje zijn de twee touwen in hun rusttoestand geschetst (het linkertouw is hier dikker gekozen). De blauwe pijlen geven de richting van de inkomende en gereflecteerde golf, de rode pijl die van de dioorgaande golf. De grootte van de pijlen representeert de amplitude. Het onderste plaatje is een momentopname van de vorm van het touw. Duidelijk zijn de twee randvoorwaarden te zien: de continuiteit van de uitwijking op $z = 0$ en van de afgeleide naar z (geen knik in het touw).*



resultaat uitgewerkt.

$$A_r = A_i \frac{k_i - k_t}{k_i + k_t} = A_i \frac{1 - \sqrt{\mu_2/\mu_1}}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}} \tag{7.33}$$

$$A_t = A_i \frac{2k_t}{k_i + k_t} = A_i \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_2/\mu_1}} \tag{7.34}$$

Vooruitlopend op opgave 7.2 vermelden we alvast dat bij de afleiding van deze uitsdrukkingen twee randvoorwaarden van belang zijn: 1) de oplossing is continue bij $z = 0$, dit betekent niets anders dan dat de touwen aan elkaar vast zitten en 2) de afgeleide naar z is continue bij $z = 0$, dit betekent dat er geen knik in het touw mag zitten. Beide randvoorwaarden moeten gelden op elk tijdstip.

De bovenstaande uitdrukkingen kennen drie interessante limietgevallen. Kies eerst $\mu_1 = \mu_2$. Dit betekent dat het linkertouw identiek is aan het rechter. We verwachten dat er in dit geval niets bijzonders gebeurt op $z = 0$. Inderdaad zien we voor dit geval met (7.33) en (7.34) dat de gereflecteerde amplitude nul is en de amplitude van de doorgelaten golf A_i.

Het tweede geval correspondeert met de limiet $\mu_2 \to \infty$. Dit geval beschrijft een touw dat op $z = 0$ is bevestigd aan een vast punt. Uitdrukkingen (7.33)en (7.34) geven voor dit geval $A_t = 0$ en $A_r = -A_i$. Het feit dat de amplitudes van de inkomende en gereflecteerd golf exact tegengesteld zijn betekent dat het eindpunt niet beweegt, zoals je verwacht voor een vast punt. De inkomende en gereflecteerde golven vormen samen een staande golf-oplossing.

Als derde geval kunnen we kijken naar de limiet $\mu_2 \to 0$. Deze limiet beschrijft het geval dat het eerste touw een stevige kabel is en het tweede een stuk dun visdraad. Nu zien we dat de vergelijkingen als oplossing hebben $A_r = A_i$ en $A_t = 2A_i$. De inkomende en gereflecteerde golven vormen samen weer een staande golf, maar nu met een 'zwiepend' uiteinde.

Tot slot noemen we nog een diepe consequentie van (7.33)en (7.34). Het blijkt dat deze oplossingen garanderen dat de energie van de inkomende golf gelijk is aan de som van de energieën van de gereflecteerde en de doorgelaten golf, precies zoals je zou verwachten. In het volgende hoofdstuk wordt het begrip energie van een golf verder uitgewerkt.

7.5 ENERGIE

staande golf: energie per lengte-eenheid Als van elk punt van de snaar de transversale posities en snelheden op een gegeven tijdstip bekend zijn, liggen ook de kinetische energie per lengte-eenheid ε_k en de potentiële energie per lengte-eenheid ε_p vast als functies van z en t.

De kinetische energie per lengte-eenheid is (let op: het symbool v is gereserveerd voor $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$)

$$\boxed{\varepsilon_k = \tfrac{1}{2}\mu \cdot \left(\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}\right)^2} \tag{7.35}$$

De potentiële energie per lengte-eenheid berekenen we voor kleine uitwijkingen als volgt.

De totale potentiële energie van een snaarsegmentje $\triangle z$ is de arbeid die de spankracht F bij de uitrekking $\triangle(\triangle z)$ van het segmentje verricht, dus

$$\varepsilon_p \triangle z = F \cdot \triangle(\triangle z) \tag{7.36}$$

Als we figuur 7.2 opvatten als een rechthoekige driehoek kunnen we $\triangle(\triangle z)$ berekenen:

$$\triangle(\triangle z) = \sqrt{(\triangle z)^2 + (\triangle y)^2} - \triangle z \simeq \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right)^2 \triangle z \tag{7.37}$$

Combineren van (7.36) en (7.37) levert

$$\boxed{\varepsilon_p = \tfrac{1}{2}F \cdot \left(\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right)^2} \tag{7.38}$$

De formules (7.35) en (7.38) gelden algemeen, en in het bijzonder ook voor staande golven. Bij een normaaltrilling van de vorm $y(z,t) = a\cos kz \cos \omega t$ ontstaat bijvoorbeeld:

$$\varepsilon_k = \tfrac{1}{2}\mu \cdot (\omega a \cos kz \sin \omega t)^2 \tag{7.39a}$$

$$\varepsilon_p = \tfrac{1}{2}F \cdot (ka \sin kz \cos \omega t)^2 \tag{7.39b}$$

- Ga met (7.35) en (7.38) na dat in een knoop steeds $\varepsilon_k = 0$ en in een buik steeds $\varepsilon_p = 0$. Geef met behulp van (7.39) nader aan hoe ε_k en ε_p zich in de knopen en buiken gedragen.

Volgens (7.4), (7.5) en (7.14) geldt dat

$$\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 = \tfrac{1}{2}Fk^2 \tag{7.40}$$

Via substitutie van (7.40) in (7.39) blijkt dat de totale energie E binnen een halve golflengte $\frac{\pi}{k}$ van de normaaltrilling constant is in de tijd:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{k}} (\varepsilon_k + \varepsilon_p)\, dz = \tfrac{1}{4}\pi a^2 Fk \tag{7.41}$$

lopende golf: energietransport Als we de totale energie E binnen een halve golflengte uitrekenen voor de staande golf (7.28), vinden we volgens (7.41) (met $a = 2A$) dat $E = \pi A^2 Fk$.

Doen we dezelfde berekening apart voor één van de lopende harmonische golven uit (7.28a)

$$y_1(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \tag{7.42}$$

dan vinden we in plaats van (7.39):

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz) \tag{7.43a}$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}Fk^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz) \tag{7.43b}$$

waaruit volgens verwachting

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{k}} (\varepsilon_k + \varepsilon_p)\, dz = \frac{1}{2}\pi A^2 Fk \tag{7.44}$$

Uit (7.43) blijkt in combinatie met (7.40) dat in de lopende golf de kinetische en de potentiële energie per lengte-eenheid overal en altijd aan elkaar gelijk zijn. Bovendien blijkt uit (7.43) in combinatie met (7.42) dat de totale energie per lengte-eenheid

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p = Fk^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz) \tag{7.45}$$

voortdurend maximaal is in punten waar $y_1(z,t) = 0$, d.w.z. in de nulpunten van de lopende golf. Dit betekent dat de in de harmonische lopende golf opgeslagen energie meeloopt met het golfprofiel, en dus de snelheid v heeft.

Een aantal van de resultaten wijken dus af van die voor staande golven.

- Leg via de formules (7.35) en (7.38) uit dat in de toppen van de lopende golf steeds geldt dat $\varepsilon = 0$.

7.6 DISPERSIE

7.6.1 dispersieve media

We bekijken nu de harmonische lopende golf in een nieuw licht. We nemen de hoekfrequentie ω en golfvector k als basisgrootheden,

$$y(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \tag{7.46}$$

We definiëren nu de fasesnelheid v_ϕ, als de snelheid waarmee een punt van constante fase $\phi = \omega t - kz$ zich verplaatst. Deze eis van constante fase laat zich schrijven als

$$z = \frac{\omega}{k}t - \frac{\phi}{k}, \tag{7.47}$$

met andere woorden, de fasesnelheid is

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}} \tag{7.48}$$

Deze relatie tussen hoekfrequentie, fasesnelheid en golfvector van een harmonische lopende golf is zeer algemeen. Als in een bepaald golfsysteem, dat wordt gekarakteriseerd door bepaalde systeemgrootheden, de fasesnelheid v_ϕ uitsluitend afhangt van deze grootheden, en *niet* van ω of k, noemt men het golfsysteem *niet-dispersief*.

We hebben laten zien dat onder bepaalde voorwaarden een snaar een niet-dispersief medium is voor transversale mechanische golven. Een tweede voorbeeld wordt gevormd door electromagnetische golven in vacuüm. De fasesnelheid van deze golven is gelijk aan de lichtsnelheid in vacuüm: $c = 3 \cdot 10^8$m/s.

dispersie en vormverandering Eerder zagen we dat een harmonische, met constante fasesnelheid v_ϕ lopende golf altijd te schrijven is als een verstoring $A\cos\omega t'$, waarbij $t' = t \pm z/v_\phi$. Hebben we nu te maken met een willekeurige (periodieke) lopende golf $y(z,t)$ in een niet-dispersief medium, dan is deze steeds te schrijven als een (oneindige) som van zulke harmonische verstoringen. Hierbij hangt t' niet af van ω, zodat ook de golf als geheel zich met de fasesnelheid v_ϕ voortplant zonder van *vorm* (dit is het gedrag in de tijd voor vaste z, en dus ook het ruimtelijk patroon voor vaste t!) te veranderen. Ook de bij zo'n golf behorende energie zal zich met deze zelfde snelheid verplaatsen. De golf $y(z,t)$ voldoet, net als al zijn componenten, aan de klassieke golfvergelijking (7.5).

Dit alles geldt echter niet voor elk golfsysteem. Als de fasesnelheid v_ϕ afhangt van ω of k is de relatie (7.48) weliswaar nog steeds geldig, maar het verband tussen ω en k (de *dispersierelatie*) is geen rechte evenredigheid meer. Als gevolg hiervan zal een lopende golf die is opgebouwd uit harmonische golven met verschillende hoekfrequenties tijdens de voortplanting een vormverandering ondergaan, doordat de componenten verschillende fasesnelheden hebben. Dit verschijnsel wordt *dispersie* genoemd. In zo'n geval noemt men het golfsysteem *dispersief*.

Een en ander heeft ook gevolgen voor de snelheid van het energietransport.

dispersierelaties van snaar en kralensnoer Onder de *dispersierelatie* van een bepaald golfsysteem verstaat men het verband tussen ω en k zoals dat volgt uit de systeemgrootheden.

In het geval van de *snaar* (met homogene massaverdeling) is de dispersierelatie (zie (7.14)):

$$\boxed{\omega^2 = v^2 k^2 = \frac{F}{\mu} k^2} \tag{7.49}$$

De fasesnelheid, het quotient van ω en k is hier dus constant en gelijk aan $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Als tweede voorbeeld bespreken we hier opnieuw de dispersierelatie van het *kralensnoer*. Hiermee bedoelen we het systeem dat we in sectie 5.3.2 gebruikten bij N gekoppelde oscillatoren en wat we bij 7.2 gebruikten om de golfvergelijking af te leiden.

De transversale uitwijking van een willekeurige massa (met rangnummer n) voldoet (onafhankelijk van randvoorwaarden) aan

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \frac{F}{d} \cdot ((y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})) \tag{7.1}$$

In 5.3.2 gebruikten we een probeerfunctie, waarvan later (in 7.2) bleek dat het een lopende golf was. Nu gebruiken we als probeerfunctie een uitdrukking die tot staande golven leidt.

$$y_n(t) = f_n \cos(\omega t + \phi) = [a \cos(knd) + b \sin(knd)] \cos(\omega t + \phi) \tag{7.50}$$

Dat deze uitdrukking een oplossing is van (7.1) is natuurlijk niet op voorhand duidelijk, maar dat het een staande golf betreft wel: de plaatsafhankelijke functie en de tijdsafhankelijke functie komen gefactoriseerd voor, dus als $f(t)g(z)$. Substitutie van (7.50) (voor y_{n+1}, y_n en y_{n-1}) in (7.1) geeft

$$-m\omega^2 f_n = \frac{F}{d}(-2f_n + f_{n-1} + f_{n+1}) \tag{7.51}$$

Maar er is een verband tussen $f_{n-1} + f_{n+1}$ en f_n:

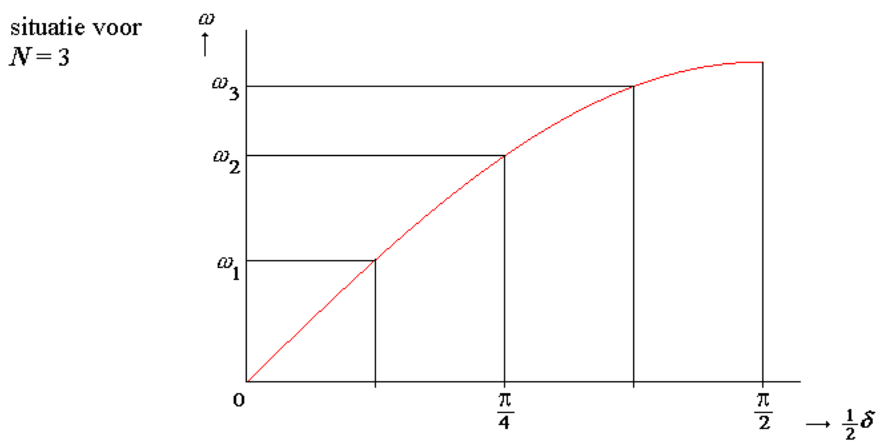
$$\begin{aligned} f_{n-1} + f_{n+1} &= a\left(\cos[(n-1)kd] + \cos[(n+1)kd]\right) + \\ &\quad + b\left(\sin[(n-1)kd] + \sin[(n+1)\,kd]\right) \\ &= 2a\cos(nkd)\cos(kd) + 2b\sin(nkd)\cos(kd) \\ &= 2f_n\left[1 - 2\sin^2(\tfrac{1}{2}kd)\right] \end{aligned} \tag{7.52}$$

Combinatie van (7.51) en (7.52) geeft tenslotte de dispersierelatie

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4F}{md}\sin^2 \tfrac{1}{2}kd = \frac{4F}{md}\sin^2 \tfrac{1}{2}\delta} \tag{7.53}$$

Hierin is $\delta = kd$ gelijk aan $2\pi\times$ het aantal hele golven dat past op de afstand d. Dit is het resultaat dat we al kennen: het invullen van lopende golven (5.23) in de bewegingsvergelijkingen (5.26)-(7.1) leidde tot de dispersierelatie (5.27)-(7.53). Omdat we

Figuur 7.6:



gezien hebben dat lopende golven te schrijven zijn als som van staande golven (en staande golven als som van lopende) hoeft het ons niet te verbazen dat we opnieuw op dezelfde dispersievergelijking voor het kralensnoer uitkomen.

Het kralensnoer vormt dus voor deze lopende golven een dispersief medium. De fasehoek δ kan daarbij nu in verband gebracht worden met de *vertragingstijd* $\triangle t$ die een lopende golf met hoekfrequentie ω nodig heeft om de afstand d tussen twee opeenvolgende kralen af te leggen:

$$\delta = kd = kv_{\phi}\triangle t = \omega \triangle t \tag{7.54}$$

Als we het kralensnoer op twee plaatsen gaan inklemmen ontstaan er, net als bij de snaar, weer randvoorwaarden die maken dat er quantisatie optreedt. Het aantal wezenlijk verschillende normaaltrillingen is nu echter beperkt tot N, het aantal kralen. Voor δ_n in de n^{e} normaaltrilling gaat dan gelden

$$\delta_n = k_n d = \frac{n\pi d}{L} = \frac{n\pi}{N+1} \tag{7.55}$$

en voor de hoekfrequentie van de normaaltrilling (zie ook figuur 7.6):

$$\omega_n^2 = \frac{4F}{md}\sin^2\frac{n\pi}{2(N+1)} \tag{7.56}$$

- Ga na dat (7.56) voor $N = 3$ oplevert: $\omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\frac{F}{md}$, $\omega_2^2 = 2\frac{F}{md}$, $\omega_3^2 = (2+\sqrt{2})\frac{F}{md}$.
- Voor grote N en kleine n kan (7.56) herleid worden tot (7.49). Laat dit zien.

7.7 GOLFPAKKETTEN

modulatiesnelheid van een zweving We gaan nu nader bekijken hoe een lopende golf die is opgebouwd uit harmonische golven met verschillende hoekfrequenties in een dispersief medium van vorm verandert. Terwille van de eenvoud nemen we eerst een golf die uit slechts twee harmonische componenten bestaat.

In sectie 7.3 zagen we een zweving tussen twee trillingen met vlak bij elkaar liggende hoekfrequenties ω_1 en ω_2 die zich langs de z-as voortplant volgens

$$y(z,t) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \tag{7.26}$$

Als er dispersie is zal echter (7.27) niet gelden, zodat deze uitwijking niet langer te schrijven is als een functie van $t - \frac{z}{v}$. Wel is (7.26), in het geval dat $A_1 = A_2$, gelijkwaardig met (vergelijk (5.12a) en (5.14a))

$$\begin{aligned} y(z,t) &= 2A\cos(\omega_{mod} t - k_{mod} z)\cos(\omega_{gem} t - k_{gem} z) \\ &= A_{mod}(z,t)\cos(\omega_{gem} t - k_{gem} z) \end{aligned} \tag{7.57}$$

waarin

$$\omega_{gem} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \quad \omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \tag{5.13a}$$

$$k_{gem} = \frac{1}{2}(k_2 + k_1), \quad k_{mod} = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) \tag{7.58}$$

Het is dus een lopende golf gekenmerkt door ω_{gem} en k_{gem}, met amplitude-modulaties gekenmerkt door ω_{mod} en k_{mod}.

In figuur 7.7 zijn als voorbeeld $y(z,t)$ en $A_{mod}(z,t)$ als functies van z getekend tussen $z = 0$ en $z = \frac{5}{4}\lambda_{mod}$ op de tijdstippen $t = \frac{1}{12} n T_{mod}$ (n = 0, 1, 2, 3), voor het geval dat $\omega_{gem} = 14\omega_{mod}$ en $k_{gem} = 7k_{mod}$.

De functies $A_{mod}(z,t)$ en $\cos(\omega_{gem} t - k_{gem} z)$ hangen elk op eenzelfde manier van z af als van t, zodat in figuur 7.7 'ruimtelijke zwevingen' te zien zijn. Maar ook is zichtbaar dat de afzonderlijke golftoppen ($*$) zich in dit geval twee maal zo snel voortplanten als de toppen van de modulaties ($+$); het resultaat is dat de ruimtelijke vorm van $y(z,t)$ als geheel voortdurend enigszins verandert.

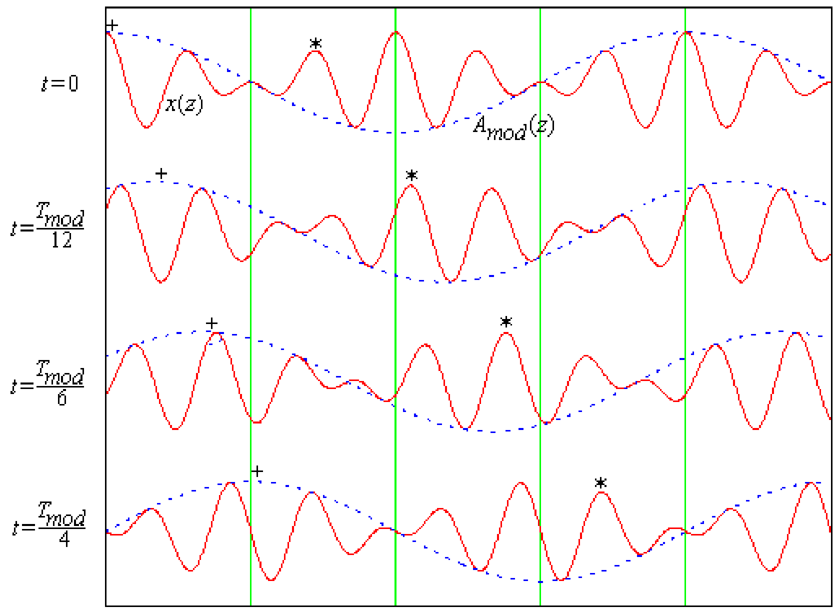
Dit gedrag is ook als volgt uit (7.57) af te leiden. Bij het volgen van een afzonderlijke top moet $\omega_{gem} t - k_{gem} z$ constant blijven, zodat de fasesnelheid v_{gem} van zo'n top gelijk is aan

$$v_{gem} = \frac{\omega_{gem}}{k_{gem}} \tag{7.59}$$

(deze snelheid ligt tussen de fasesnelheden v_1 en v_2). Bij het volgen van een top van een modulatie blijft $\omega_{mod} t - k_{mod} z$ constant; de hiervoor benodigde snelheid

$$v_{mod} = \frac{\omega_{mod}}{k_{mod}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\triangle\omega}{\triangle k} \tag{7.60}$$

Figuur 7.7:



(waarmee ook de energie zich voortplant) noemen we de *modulatiesnelheid*.

Let er op dat v_{mod} alleen gedefinieerd is voor modulaties ten gevolge van *twee* harmonische componenten.

- Controleer dat het getallenvoorbeeld van figuur 7.7 er toe leidt dat $v_{mod} = \frac{1}{2}v_{gem}$. Controleer ook dat voldaan is aan $v_1 < v_{gem} < v_2$.

groepssnelheid Stel dat de dispersierelatie van het medium waarin de golf (7.57) uit figuur 5.3 loopt wordt weergegeven door de dispersiekromme uit figuur 7.8, waarin ook ω_1, ω_2, k_1 en k_2 (niet op schaal) zijn aangegeven. De fasesnelheid v_{gem} uit (7.59) wordt dan voorgesteld door $\tan\alpha$, en de modulatiesnelheid v_{mod} uit (7.60) door $\tan\beta$.

Als k_1 en k_2 beide tot k_{gem} naderen (dus in de limiet $\triangle k \to 0$) worden deze snelheden respectievelijk gelijk aan

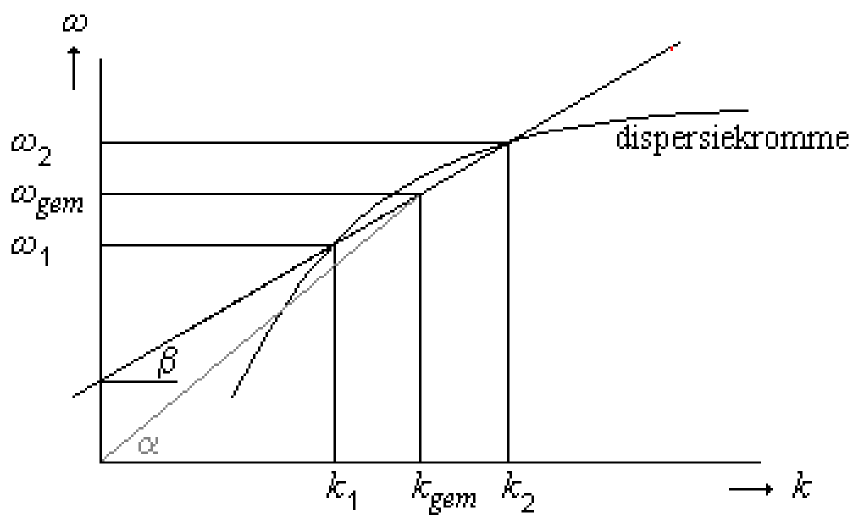
$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}} \tag{7.48}$$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \tag{7.61}$$

beide bepaald in het punt $k = k_{gem}$ van de dispersiekromme.

In het volgende komt aan de orde waarom $\frac{d\omega}{dk}$ de *groepssnelheid* v_g wordt genoemd.

Figuur 7.8:



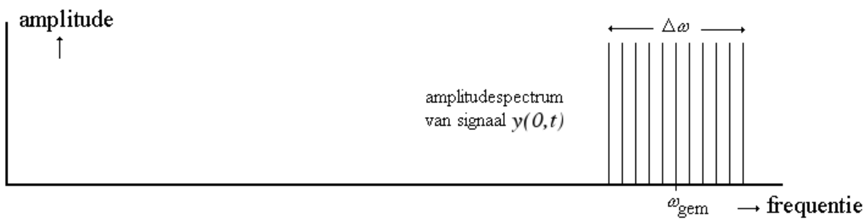
pulsen en golfpakketten Met een *puls* bedoelen we meestal een kortstondige van nul verschillende uitwijking als functie van de tijd t, zoals we zagen in figuur 7.3. Als in een niet-dispersief medium zo'n puls bijvoorbeeld wordt opgewekt in $z = 0$ kan hij zich in de (positieve en negatieve) z-richting gaan voortplanten met snelheid v. Het ruimtelijke patroon dat we dan (in beide richtingen) zien bewegen is een lokale uitwijking als functie van z; dit wordt vaak een *golfpakket* of *golfgroep* genoemd.

Niet altijd is, zoals in sectie 7.3, de snelheid v voor een golfpakket goed gedefinieerd. We willen kort schetsen hoe een puls $y(0, t)$ rond het tijdstip $t = 0$ wiskundig opgebouwd kan worden gedacht (het zal blijken dat hiervoor een groot aantal harmonische componenten nodig is). Daarna bespreken we kort hoe in een dispersief medium de voortplanting van het uitgezonden golfpakket kan worden beschreven.

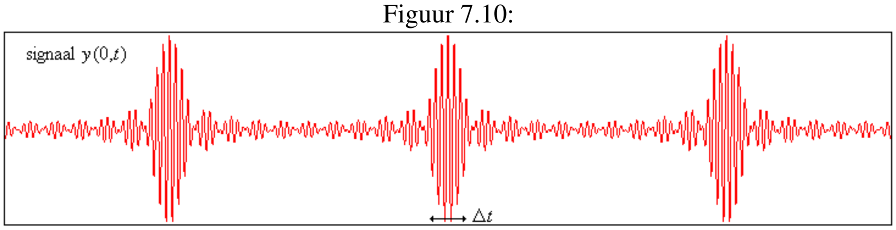
We nemen eerst voor de samenstelling van het signaal $y(0, t)$ een vast hoekfrequentie-interval (een hoekfrequentie*band*) $\triangle\omega$ rond een 'centrale hoekfrequentie' ω_{gem}, en daarbinnen gelijkmatig gespreid een groot aantal harmonische componenten. Getekend op de wijze van figuur 5.4 ziet het amplitudespectrum van het signaal er dan bijvoorbeeld uit zoals in figuur 7.9. Het signaal zelf is geschetst in figuur 7.10: het bestaat uit pulsen die periodiek terugkeren. Dit patroon is op te vatten als een generalisatie van de zwevingen uit figuur 5.5.

Het is vervolgens na te gaan dat naarmate $\triangle\omega$ groter wordt gekozen, de tijdsduur $\triangle t$ van de afzonderlijke pulsen (zie figuur 7.10) korter wordt. Bovendien komen de pulsen in de tijd verder uit elkaar te liggen naarmate binnen de band $\triangle\omega$ meer com-

Figuur 7.9:



Figuur 7.10:



ponenten aanwezig zijn. Door dit aantal componenten willekeurig groot te maken (een *continu spectrum* te nemen) kunnen we zelfs zorgen dat er maar één korte puls overblijft rond het tijdstip $t = 0$.

Volgens sectie 7.6.1 zal in een dispersief medium het tengevolge van de puls $y(0,t)$ uitgezonden golfpakket $y(z,t)$ tijdens de voortplanting van vorm veranderen. De manier waarop dit gebeurt lijkt op wat zich afspeelt bij de 'ruimtelijke zwevingen' in figuur 7.7: de omhullende van het pakket krijgt een andere snelheid dan de afzonderlijke golven daarbinnen.

Immers, uit de dispersiekromme kan bij $\triangle\omega$ op de manier van figuur 7.8 een daarbij behorende band $\triangle k$ van golfvectoren worden gevonden. Als $\triangle\omega$ smal genoeg is correspondeert met de centrale hoekfrequentie ω_{gem} een centrale golfvector k$_{gem}$. Omdat voor *elke* combinatie van twee hoekfrequenties binnen de band $\triangle\omega$ de modulatiesnelheid v_{mod} ongeveer gelijk is aan $d\omega/dk$ in het punt $k = k_{gem}$, mogen we stellen dat bij benadering het golfpakket (de golfgroep) *als geheel* de snelheid $d\omega/dk$ heeft.

Daarom heet deze snelheid in (7.61) de groepssnelheid v_g. Dit is de snelheid van de omhullende, waarmee zich dus ook de *energie* voortplant. De groepssnelheid kan worden bepaald uit de dispersierelatie, waarin nu k als onafhankelijke variabele wordt opgevat, en is zelf weer een functie van k.

- Leg uit dat bij het uitzenden van een golfpakket geldt: $\triangle\omega\triangle t \simeq \triangle k\triangle z$. Hoe verandert de lengte $\triangle z$ die het pakket bij het uitzenden krijgt, als $\triangle\omega$ groter wordt gekozen?

- Zou het mogelijk zijn dat de groepssnelheid groter wordt dan de lichtsnelheid? Dezelfde vraag voor de fasesnelheden van de componenten.

Bij de voortplanting van een golfpakket (in één dimensie) geldt al met al het volgende.

De groepssnelheid voldoet aan

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_\phi k)}{dk} = v_\phi + k\frac{dv_\phi}{dk} \tag{7.62}$$

Als er geen dispersie is houdt het pakket (afgezien van demping) afmeting en vorm; alleen dan zijn groepssnelheid en fasesnelheid onderling gelijk en onafhankelijk van k.

Als de dispersie niet te groot is, en $\triangle k$ smal genoeg, kan de voortplanting van het pakket ruwweg worden beschreven met één groepssnelheid, en zal het pakket langere tijd dezelfde afmeting behouden.

Bij sterke variatie van de groepssnelheid binnen de band $\triangle k$ zal het pakket snel langer worden en niet als zodanig herkenbaar blijven. Het is dan niet meer goed mogelijk om over *de* snelheid van het golfpakket te spreken, en de groepssnelheid verliest dan deze fysische betekenis.

7.8 SAMENVATTING

1. Transversale uitwijkingen $y(z,t)$ in een homogene snaar voldoen aan de klassieke golfvergelijking:
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \tag{7.5}$$
waarin v^2 gelijk is aan de snaarspanning gedeeld door de massa per lengte-eenheid.

2. Alle functies van de gedaante f$(t - \frac{z}{v})$ of f$(t + \frac{z}{v})$ stellen lopende golven voor die voldoen aan de klassieke golfvergelijking. Daarbij is v de voortplantingssnelheid.

3. Een harmonische lopende golf kan worden voorgesteld door
$$y(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \tag{7.46}$$
De voortplantingssnelheid heet hier ook wel de fasesnelheid, en voldoet aan
$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \tag{7.48}$$

4. Een staande golf is te beschrijven als een superpositie van twee volkomen gelijke lopende golven met tegengestelde voortplantingsrichting:
$$y(z,t) = A\cos(\omega t - kz) + A\cos(\omega t + kz) \tag{7.28a}$$

5. De algemene oplossingen in de vorm van staande golven voor een snaar met vaste, respectievelijk vrije uiteinden in $z = 0$ en $z = L$ zijn de superposities van normaaltrillingen
$$y_{n,vast}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nk_1 z\cos(n\omega_1 t + \phi_n) \tag{7.29a}$$
$$y_{n,vrij}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nk_1 z\cos(n\omega_1 t + \phi_n) \tag{7.29b}$$

met $k_1 = \dfrac{\pi}{L}$ en $\omega_1 = vk_1$.

De golflengte van de eerste normaaltrilling is $\lambda_1 = \dfrac{2\pi}{k_1} = 2L$.

6. De maxima in de energie per lengte-eenheid in een normaaltrilling lopen heen en weer tussen knopen (in de uiterste stand) en buiken (in de evenwichtsstand), maar de totale energie binnen een halve golflengte is constant in de tijd.

7. In een niet-dispersief medium (bv. ideale snaar) plant de energie van een harmonische lopende golf zich voort met de fasesnelheid.

8. Een frequentie-onafhankelijke fasesnelheid in een medium is gelijkwaardig met het ontbreken van dispersie en met vormbehoud van een willekeurige lopende golf.

9. Er bestaan media die dispersie vertonen (bv. kralensnoer), zodat daarin de fasesnelheid voor harmonische golven afhankelijk is van de frequentie. Niet-harmonische lopende golven ondergaan daarin een vormverandering.

10. In een dispersief medium planten de modulaties (en dus de energie) van een zweving zich in het algemeen met een andere snelheid voort dan met de fasesnelheid.

11. In een niet-dispersief medium is de groepssnelheid gelijk aan de fasesnelheid.

12. De dispersierelaties van snaar en kralensnoer zijn respectievelijk

$$\omega^2 = \frac{F}{\mu}k^2 \tag{7.49}$$

$$\omega^2 = \frac{4F}{md}\sin^2 \tfrac{1}{2}kd \tag{7.53}$$

13. Een puls in de tijd is opgebouwd uit componenten in een beperkte band van hoekfrequenties, gelegen rond een centrale frequentie ω_{gem}. Opgewekt op een bepaalde plaats kan een puls aanleiding geven tot een ruimtelijk bewegend golfpakket met een centrale golfvector k_{gem}.

14. In een dispersief medium beweegt een golfpakket (en dus de energie daarvan) zich voort met de groepssnelheid:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{7.61}$$

gemeten in het punt $k = k_{gem}$; voorwaarde is wel dat de groepssnelheid ruwweg constant is voor de waarden van ω en k die in het golfpakket voorkomen.

15. Als de groepssnelheid sterk van k afhangt zal het golfpakket tijdens zijn beweging niet alleen vervormen, maar ook langer worden.

VERANTWOORDING

Deze syllabus is gebaseerd op eerdere versies van het diktaat *Trillingen en Golven* door Jan Dekker met tekstbijdragen van Cor Tuijn, bewerkt door Klaasjan van Druten en Ben van Linden van den Heuvell.
Verdere tekstbijdragen en eindredactie: Tom Hijmans, Ben van Linden van den Heuvell en Marcel Vreeswijk.