
Algemeen

Anders dan bij eerdere practica moet er bij deze experimenten meer uitgevoerd worden dan alleen een gedetailleerde lijst met opdrachten. Gebruik een deel van de tijd om de lijst 'minimale opdracht' af te werken en een ander deel voor 'vervolgopdrachten'. Voor de vervolgopdrachten worden enkele suggesties aangedragen, maar ook andere onderzoeksvragen mogen gesteld en beantwoord worden. Leidraad hierbij is: maak zo veel mogelijk de verbinding tussen fenomenen, die in het college langsgekomen zijn en die bij het concrete systeem een rol spelen. Kwantificeer waar mogelijk, geef fouten waar nodig.

Alle proeven die worden aangeboden, worden geacht lineair te zijn. Dat betekent dat de waargenomen fenomenen niet afhangen van de amplitude van de trillingen of van de energie die in de trilling of golf is opgeslagen. Meten hoe de response afhangt van de grootte van input is dus meestal niet zo nuttig.

Soms speelt dispersie een rol, bijvoorbeeld in het elektrische laddernetwerk. Maar in de meeste andere gevallen is er sprake van een lineaire dispersierelatie en dus een vaste snelheid van de golven, ongeacht hun golflengte.

In veel gevallen is het nodig om specifieke materiaalconstanten te kennen. Een voor de hand liggende en gemakkelijke bron hiervoor is Wikipedia.

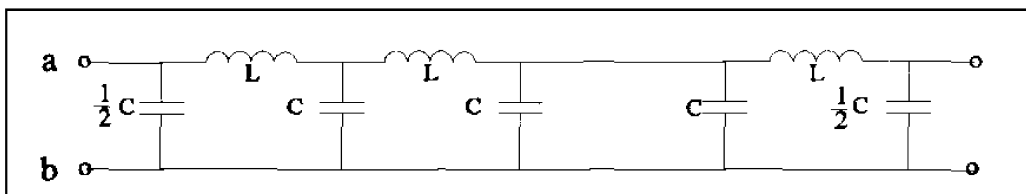
■ Verslag

Het verslag wordt geacht te bevatten: een korte beschrijving van de proef doel en methoden, meetresultaten, uitwerking, analyse (incl. grafieken en foutschatting) en conclusies. Het verslag moet leesbaar zijn *zonder* er de practicumhandleiding, wikipedia e.d. bij te hebben.

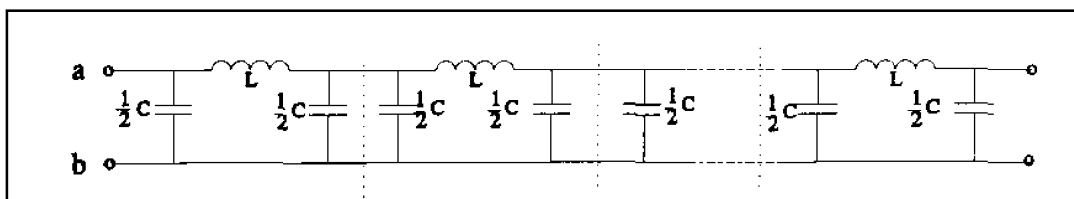
Coaxiale kabel en laddernetwerk

■ Laddernetwerk

Het laddernetwerk is het elektrische analogon van het 'kralensnoer' (een lineair systeem van veel massa's en veren). Zoals het snoer overgaat in een snaar, in het limietgeval van steeds kleiner wordende en steeds meer massa's en veren, zo gaat het laddernetwerk over in de coaxkabel. Laten we eerst kijken naar het geval van het elektrische snoer:



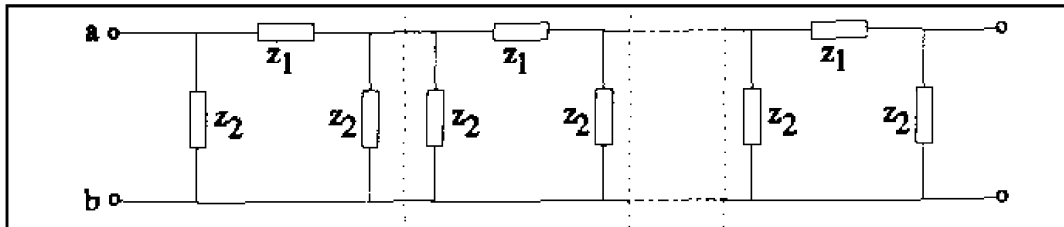
Het herhalende karakter is duidelijk. Er kan op een aantal manieren een eenheidsblokje gekozen worden, maar het handigst is om de condensatoren door te snijden:



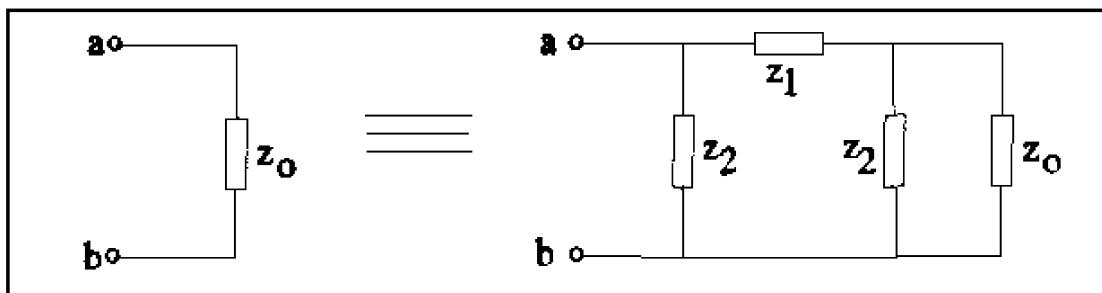
We kennen de impedanties van de spoelen en de condensatoren, maar het is handiger om die kennis nog even niet in te zetten. We gebruiken de impedanties

$$Z_1 = i \omega L \quad ; \quad Z_2 = \frac{2}{i \omega C}$$

om de spoelen en condensatoren aan te geven.



Wat is nu de impedantie, die je 'elektrisch gezien ziet' tussen de punten a en b als er heel veel secties zijn? We weten hoe je impedanties van parallel geschakelde of in serie geschakelde elementen kan combineren tot 1 nieuw, vervangend element, maar omdat nu voor heel veel condensatoren en spoelen te doen, lijkt toch wat veel van het goede. De oplossing is elegant en waard om even rustig naar te kijken. Het antwoord is Z_0 . Die kennen we niet, maar kunnen we wel zo noemen. Die Z_0 is de vervanging voor veel secties. Eentje meer of minder maakt niet uit. Dus als we er nog een aan toevoegen is het antwoord nog steeds Z_0 . De vervangingsimpedantie van de volgende twee gevallen is dus gelijk:



Dat geeft de mogelijkheid om Z_0 uit te rekenen:

$$Z_0 = Z_0 // (Z_1 + (Z_2 // Z_0))$$

Hierin is ad hoc het symbol $//$ ingevoegd. $Z_2 // Z_0$ geeft de vervangingsimpedantie van de parallelschakeling van Z_0 en Z_2 .

Met *Mathematica* zou je dat als volgt uitrekenen:

```
parallel[a_, b_] := 1 / (1/a + 1/b)
z0 /. Last[Solve[z0 == parallel[z2, z1 + parallel[z2, z0]], z0]]
```

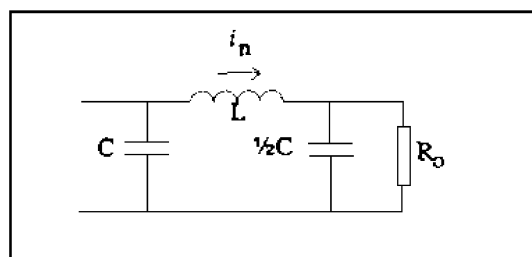
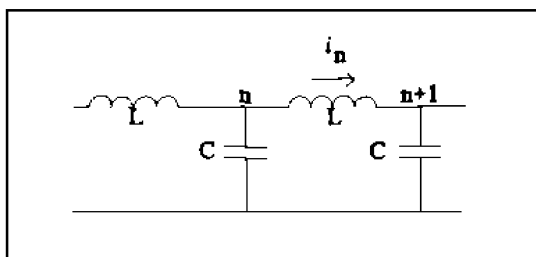
$$\frac{\sqrt{z_1} z_2}{\sqrt{z_1 + 2 z_2}}$$

Nu kunnen we de echte impedanties invullen :

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}}}$$

Dit is de z.g. karakteristieke impedantie. Als de keten wordt afgesloten met deze impedantie, heeft niemand door dat hij maar eindig lang is. Merk op dat de uitgerekenende impedantie reëel is (althans als ω voldoende klein is). We kunnen de karakteristieke impedantie dus beter R_0 noemen. Dat reëel zijn, is eigenlijk niet zo gek: als er energie van links naar rechts gaat en er moet de suggestie worden gewekt dat de energie verder naar rechts gaat, dan moet het geabsorbeerd worden. We hadden al in de *Mathematica* simulaties van massa's en veren gezien dat kortsluiten (uitwijking is nul) of open laten (stroom is nul) leidt tot reflecties. Ook dat is achteraf niet zo vreemd. Waar zou de energie anders moeten blijven? Noch de condensor noch de spoel kunnen energie dissiperen.

Wat is de verhouding van de spanning op bouwsteen nummer $n+1$ en nummer n ? Uit de onderstaande linker figuur zien we $V_n = V_{n+1} + I_n i \omega L$



Maar omdat we de keten na elke bouwsteen ook mogen afsluiten met R_0 (zie rechts boven) geldt ook: $V_{n+1} = I_n (Z_2 // R_0)$. Invullen van $Z_2 = 2 / i \omega C$ en wat omschrijvingen leidt tot het resultaat:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L C - i \omega L \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{\omega^2 C^2}{4}}$$

Toegegeven, dit resultaat nodigt niet echt uit tot nader onderzoek. Inderdaad is het rekenwerk vervelend, maar er vallen wel eenvoudige en duidelijke conclusies uit te trekken. We onderscheiden frequenties groter en kleiner dan de z.g. afsnij-frequentie (cut off frequency)

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L C}}$$

Voor $\omega < \omega_c$ is de verhouding $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ een complex getal met absolute waarde 1. Dat hadden we in het mechanische geval ook al gezien: de maximale uitwijking is overal gelijk, maar wordt overal op verschillende momenten bereikt. De verhouding is dus ook te schrijven als

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{-i \delta}$$

Het al genoemde vervelende rekenwerk leidt tot

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Opnieuw een resultaat, dat we al kennen van het snoer. Hier staat niets anders dan een dispersierelatie. Maar in plaats van toe te werken naar een soort k-vector, ligt het nu meer voor de hand om te kijken naar de 'wachtijd' die met δ samenhangt:

$$\Delta t = \frac{\delta}{\omega}$$

Als $\omega \ll \omega_c$ vereenvoudigen we de sinus tot zijn argument en krijgen we als vertraging per bouwsteen

$$\Delta t = \frac{\delta}{\omega} = 2 \frac{\omega / \omega_c}{\omega} = \frac{2}{\omega_c} = \sqrt{L C}$$

En daarmee als snelheid

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ bouwstenen / s}$$

Voor frequenties ω groter dan ω_c is de verhouding $V_{n=1} / V_n$ reëel, maar kleiner dan 1.

■ Minimale opdracht voor het laddernetwerkdeel

- Maak een opstelling die geen last heeft van reflectie. Wat is de karakteristieke weerstand? Reflectie is niet alleen mogelijk aan het einde van het netwerk, maar ook aan het begin. Een weerstand met de karakteristieke waarde voorkomt dit. Een grotere weerstand tussen netwerk en bron, zeg $10 \text{ k}\Omega$, brengt meer symmetrie in het probleem en geeft een goede uitgangssituatie.
- Meet de vertraging per bouwsteen. Vergelijk deze vertraging met het resultaat dat volgt uit de zelfinductie en capaciteit van de componenten. Geef het antwoord ook als een snelheid (in m/s).
- Meet de dispersie over een zo groot mogelijk frequentiebereik.
- Zie het effect van dispersie op een signaal dat meerdere frequentiecomponenten bevat (bijvoorbeeld een blokfunctie), als functie van de frequentie.
- Bepaal de afsnijfrequentie en vergelijk het resultaat met het resultaat dat volgt uit de zelfinductie en capaciteit van de componenten.

■ Vrije vervolgo opdracht

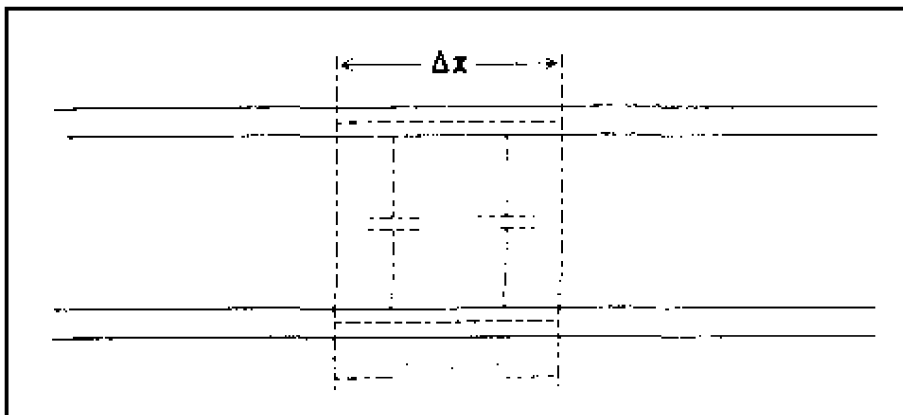
Zowel bij de behandeling van het elektrische geval (het laddernetwerk) als van het mechanische geval (het kralensnoer) is gebleken dat er een afsnijfrequentie is: een maximale frequentie waarbij nog een reële k -vector te vinden is, of hier bij het laddernetwerk, een reële vertraging per bouwsteen. We kunnen proberen om de dispersierelatie ook bij hogere frequenties serieus te nemen. Onvermijdelijk wordt dan de k -vector complex. Het is dan gemakkelijker om met e -machten te werken dan met sinussen of cosinussen. Het imaginaire deel van k verklaart de demping:

$$e^{i k z} = e^{i (k_r + i k_i) z} = e^{-k_i z} e^{i k_r z}$$

Probeer na te gaan of, bij frequentie hoger dan ω_c , de demping per sectie inderdaad uit de al bekende dispersierelatie volgt.

■ Coaxkabel

Voor veel toepassingen is die afsnijfrequentie slecht nieuws. Wie signalen met frequenties hoger dan de afsnijfrequentie het laddernetwerk opstuurt, ziet dat het signaal verzwakt wordt. En bij frequenties net onder de afsnijfrequentie is er het probleem van dispersie: niet voor alle frequenties is de snelheid hetzelfde. Een signaal, dat Fourier-opgebouwd is uit verschillende frequentie-componenten zal vervormd worden. Als de afsnijfrequentie omhoog moet, moeten de L 'en en de C 's kleiner. Totdat ze zo klein worden dat ze niet meer afzonderlijk te zien zijn. Zoals het snoer overgaat in een snaar, zo is het continue geval van een laddernetwerk een transmissielijn



Als de spoelen en de condensatoren steeds kleiner worden, maar er wel steeds meer van nodig zijn, is het, opnieuw in analogie met de snaar, handiger om op grootheden per meter over te stappen: L' en C' . In het limietgeval gaat de afsnijfrequentie naar ∞ . De karakteristieke weerstand blijft gewoon wat hij was: de schaalverkleining speelt zowel in de teller als in de noemer van de uitdrukking voor R_0 .

De vertragingstijd, nu per meter:

$$\Delta t = \sqrt{L' C'}$$

En de snelheid, nu niet in bouwsteen/s, maar echt in m/s :

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

Een concreet geval van een transmissielijn is de al eerder genoemde coaxkabel. Een coaxiale kabel of kortweg coaxkabel bestaan uit een buitenmantel, een holle metalen cylinder vaak van gevlochten koperdraad, met door het centrum een tweede, dunnere draad. Tussen de buitenmantel en de binnendraad zit een diëlectrisch medium. Het valt een beetje buiten het bestek van dit vak om de zelfinductie en capaciteit (steeds per meter) hier af te leiden. We geven simpelweg het resultaat:

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

Hierin zijn μ en ϵ de magnetische permeabiliteit en de diëlectrische constante. De symbolen a en b staan hier voor de straal van de binnendraad en de buitenmantel. De ϵ en μ worden vaak gegeven als product van de vacuumwaarde en een dimensieloze materiaalconstante: $\mu = \mu_r \mu_0$ en $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. De waarde van μ_r is voor niet-magnetische materialen altijd 1. De waarde van ϵ_r is b.v. op Wikipedia te vinden (dielektrische constante).

Daarmee wordt de transmissiesnelheid van een coaxkabel

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Als ϵ_r en μ_r allebei 1 zijn, dan is deze snelheid de lichtsnelheid. Uit de gemeten waarde van v volgt dus ϵ_r . (Dit resultaat is blijkbaar geen functie van de precieze vorm van de kabel, waarvan de details door a en b worden vastgelegd).

En de karakteristieke weerstand:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

In de praktijk is deze karakteristieke weerstand voor coaxkabels meestal 50Ω . Als a en b bekend zijn (er zijn op het praktijk opgeknippte kabels om a en b op te meten) dan kan opnieuw ϵ_r worden bepaald.

■ Minimale opdracht (coaxdeel)

- Meet de propagatiesnelheid van een signaal in een coaxkabel. Geef het resultaat ook als fractie van de lichtsnelheid. Wat is ϵ_r ?
- Vergelijk het oorspronkelijke signaal en het gereflecteerde signaal als de kabel is kortgesloten en als de kabel aan het einde open is. Verklaar de overeenkomsten en de verschillen.
- Meet de reflectie van een coaxkabel als functie van de afsluitweerstand.

■ Vrije vervolgo opdracht

- Welk materiaal zou, op basis van de gevonden ϵ_r , tussen de binnen en de buitenmantel kunnen zitten?
- Meet de straal van de binnenmantel en de buitenmantel a en b . Bepaal hieruit de karakteristieke weerstand.
- Kijk wat de golflengten zijn bij de tot dusver gebruikte frequenties. Kies een kabel die voldoende extreem (juist lang of juist kort?) en een frequentie die voldoende extreem (juist hoog of juist laag?) is, zodat staande golven in een coaxkabel opgewekt kunnen worden. Hoe kunnen de resonantiefrequenties worden waargenomen?