

# Computersimulatie van de beweging van protonen in het aardmagnetisch veld (Van Allen gordels)



## 1 Samenvatting

Door diverse magnetische effecten ontstaan in het aardmagnetisch veld 'gordels' van geladen deeltjes, qua vorm symmetrisch rond de pool-as. De beweging van deze deeltjes is gesimuleerd met een FORTRAN programma, waarbij diverse plots zijn gemaakt en de invloed van de snelheid van de deeltjes en de eventuele oscillatie van het magneetveld op de vorm van de gordels is bekeken. Voor eenvoudige gevallen kloppen de resultaten met de analytische uitkomst, ingewikkelder gevallen leveren acceptabele resultaten, die echter door gebrek aan literatuurgegevens niet verifieerbaar zijn.



Afbeelding 1: Veldlijnenpatroon v.h. aardmagnetisch veld

## 2 Inleiding

Het magneetveld van de aarde is niet homogeen. Een geladen deeltje dat in dit magneetveld wordt geschoten (bijvoorbeeld afkomstig van de zon), zal zich volgens een ingewikkeld patroon gaan bewegen, maar door diverse effecten 'gevangen' blijven binnen de zogeheten 'Van Allen'-gordels. Door het numeriek integreren van de bewegingsvergelijking, waarbij voor het aardveld een magnetische dipool is gekozen, is een goed beeld te verkrijgen van het hoe en waarom van de bewegingen van de deeltjes onder verschillende omstandigheden (beginsnelheid, sterkte magneetveld etc.).

## 3 Theorie

### 3.1 Magnetisch veld v.d. aarde

(Gegevens uit [2] en [3]) In zeer goede benadering kan het magnetisch veld van de aarde gezien worden als een magnetische dipool. In formulevorm betekent dit:

$$B = B_0 \frac{(-\hat{m} + 3(\hat{m} \cdot \hat{R})\hat{R})}{(R_e/R)^3} \rightarrow \left(\frac{R}{R_e}\right)^3 \quad (1)$$

waarin  $R_e$  de straal van de aarde,  $\hat{m}$  de eenheidsvector in de richting van de dipool,  $R$  de afstand tot het middelpunt van de aarde en  $B_0$  een schaalconstante is. De correcte waarde voor  $B_0$  voor het aardmagnetisch veld bedraagt  $3,5 \cdot 10^{-5}$  T, de waarde van  $R_e$  is  $6,4 \cdot 10^6$  m (zie [3]). Zie fig.1 voor een ruwe schets van het veldlijnenpatroon.

### 3.2 Bewegingsvgl. van geladen deeltjes

Uiteraard geldt voor de bewegingsvergelijking van een geladen deeltje in een magnetisch veld de Lorentz krachtvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

100

waarin  $\vec{p}$  de relativistische impuls,  $q$  de lading van het deeltje,  $v$  de snelheid en  $\vec{B}$  het magnetisch veld, in het behandelde geval zoals in vgl. (1). Vullen we voor  $\vec{p}$  in:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

(met  $m$  de rustmassa) dan komt er voor de versnelling van het deeltje:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4)$$

### 3.3 Van Allen gordels

In de beweging van een geladen deeltje in het aardmagnetisch veld is een drietal effecten te onderscheiden:

1. Cirkelbeweging rond de veldlijnen. Dit treedt uiteraard op omdat de magnetische kracht loodrecht staat op de snelheid en op de veldlijn. Als we het veld benaderen door een homogeen veld is de straal van deze cirkelbeweging te vinden uit:

$$F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} = F_{magn.} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad (5)$$

De omloopstijd volgt dan uit:

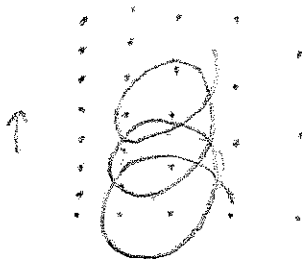
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (6)$$

Indien er behalve een snelheidscomponent loodrecht op de veldlijnen ook nog een component evenwijdig aan de veldlijnen is, heeft dit uiteraard geen effect op de cirkelstraal. De superpositie van de cirkelbeweging en de beweging evenwijdig aan de veldlijn zorgt dan voor een helixbeweging.

2. 'Drift' van de cirkelbeweging. Omdat het veld gedurende de cirkelbeweging niet overal even sterk is (sterker naarmate het deeltje dichterbij de aarde is), is de straal van de cirkels ook niet overal gelijk. Dit leidt tot een beweging zoals in fig. 2
3. 'Mirroring' v.d. helixbeweging. Omdat het magnetisch veld niet homogeen is, is er behalve de kracht die zorgt voor de cirkelbeweging ook nog een component loodrecht daarop (zie fig. 3). Hierdoor zal de snelheidscomponent evenwijdig aan de veldlijn van grootte veranderen. In een convergent magnetisch veld wordt een deeltje aldus gereflecteerd.

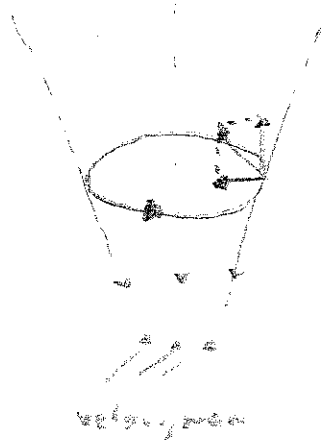
In concreto betekent dit voor de beweging van een deeltje in het aardmagnetisch veld dat er een helixbeweging ontstaat rond de veldlijn, die in de buurt van de polen, waar het veld convergeert, gereflecteerd wordt. Bovendien zorgt de drift voor een precessie van de beweging in azimuthale richting. Er ontstaan zo 'gordels' van deeltjes die gevangen zitten in het veld. In de wandelgangen heten ze 'Van Allen gordels', naar de ontdekker James A. Van Allen (in 1959).





= snelheids

Afbeelding 2: Precessie v.d. cirkelbeweging



Afbeelding 3: Krachten op geladen deeltje





### 3.3.1 Experimentele data

In het aardmagnetisch veld zijn twee gordels met een aanzienlijk hogere deeltjesdichtheid dan elders (zie voor een verklaring paragraaf 'zonnewind'). De eerste, op een afstand van ongeveer 1.5 tot 2.0 maal de straal van de aarde (gemeten in het equatorvlak), bestaat grotendeels uit hoogenergetische protonen. De energieën hiervan lopen uiteen van 5 tot 700 MeV. Op grotere afstand, ongeveer 4 maal de straal van de aarde, is er een tweede gordel, die voornamelijk bestaat uit hoogenergetische electronen. De energieën liggen hier in de buurt van de 100 KeV (gegevens uit [1]).

### 3.3.2 Zonnewind

Het aardmagnetisch veld wordt sterk beïnvloed door de stroom van geladen deeltjes die afkomstig is van de zon. Deze deeltjes gaan een interactie aan met het veld van de aarde, waardoor ingewikkelde stromen gaan lopen die op hun beurt weer het veld beïnvloeden. In de literatuur wordt dit vaak weergegeven ~~als in fig. 3~~, alsof er een soort vloeistofstroom rond de aarde loopt. Zie voor de waarnemingen met het computerprogramma op dit gebied verder de paragraaf 'Experimenten'.

De zonnewind is een grote leverancier van deeltjes voor de Van Allen gordels. Dat er 2 gordels in het aardmagnetisch veld zijn met een aanzienlijk hogere dichtheid wordt hoogstwaarschijnlijk veroorzaakt door het energiespectrum van de zonnewind-deeltjes. Aangezien hierover zeer weinig bekend is in de literatuur, is met dit gegeven verder geen rekening gehouden.

## 4 Algorithme

Voor de oplossing van de bewegingsvergelijking van het geladen deeltje is gebruik gemaakt van de discrete oplossing van vgl. (4):

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \text{zie vgl. (4)} \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{v}dt \\ \vec{v}' &= \vec{v} + \vec{a}dt\end{aligned}\tag{7}$$

Aangezien de magnetische kracht altijd loodrecht staat op de snelheid, zal  $|\vec{v}|$  constant zijn. Een gedeelte van de door het discretiseringsproces onstane fout in  $\vec{v}$  kan dus worden weggewerkt door de nieuwe  $\vec{v}$  ( $\vec{v}'$ ) steeds weer de lengte van de oorspronkelijke  $\vec{v}$  te geven.

Zie voor een blokschema bijlage 1 en verder het FORTRAN programma (met commentaar) in bijlage 2.

## 5 Weergavemogelijkheden, grafieksoorten

Om een duidelijk beeld te kunnen krijgen van de bewegingen is een de mogelijkheid ingebouwd om deze op een aantal verschillende manieren te projecteren. In het kort:

**2D bovenaanzicht:** Loodrechte projectie op het equatorvlak



**2D zijaanzicht:** Loodrechte projectie langs lijnen  $\phi = \text{const}$  op het verticale vlak opgespannen door de  $x$  en de  $z$  as.

**2D contourplot:** Zelfde als hierboven, waarbij nu echter uitsluitende de maximaal en minimaal bereikte afstand op iedere hoogte  $z$  is weergegeven. Dit geeft de omtrek van de Van Allen gordels weer.

**3D plot:** Centrale projectie (de  $z$ -coördinaat wordt gebruikt om de  $x$  en de  $y$  coördinaat te schalen), waarbij de hoek waaronder er op het equatorvlak wordt gekeken instelbaar is.

Daarnaast is er de mogelijkheid om 'multi-runs' te maken. Hierbij worden er meerdere simulaties achter elkaar gedraaid, waarbij de beginvoorwaarden door een van te voren in te stellen gebied heen lopen. Het gedrag van de deeltjes kan zo als functie van diverse parameters bepaald worden. De maximaal en minimaal bereikte afstand tot de aarde zijn vervolgens in een grafiek uit te zetten tegen de waarden van de veranderde parameter.

Kort overzicht van menu-opties in het programma:

**Aantal iteraties:** Aantal loops door de hoofdroutine.

**delta-t:** tijdstap  $dt$  in vgl. (7).

**beginplaats:** beginpositie van het deeltje (in aardstraal eenheden)

**beginsnelheid:** idem, nu beginsnelheid. De weergegeven energie is de kinetische energie (relativistisch).

**eindsnelheid:** bij meerder 'runs' loopt de beginsnelheid van het deeltje door het interval gemarkeerd door 'beginsnelheid' en 'eindsnelheid'.

**oscillatiefreq. Bst:** Oscillatiefrequentie van het  $B$  veld, startwaarde.

**eindfreq:** idem, eindwaarde. Gebruikt in multi-run situatie

**aantal runs:** bepaald in hoeveel stappen door de aangegeven intervallen in de beginparameters gelopen wordt. Maximaal 10.

**zonnewind:** Schakelt de simulatie van zonnewind aan of uit. Zie discussie voor een bespreking van dit minder geslaagde onderdeel.

**2D/3D plot:** Kiest tussen een 2 of 3 dimensionale weergave van de bewegingen.

**rotatiehoek:** Stelt de hoek in waaronder het equatorvlak naar de kijker toe is gekanteld (alleen te gebruiken in 3D weergave-mode).

**dichtheidsplot:** Geeft i.p.v. een blik op de noordpool een plaatje van de straal  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  tegen de hoogte  $z$ .

**loops per plot:** Aantal maal dat de hoofdloop doorlopen moet worden voordat er een display-routine wordt aangeroepen.

**zoom factor:** Overall zoom-factor voor de grafische afbeeldingen.

**3d zoomfactor:** Extra zoom-factor voor de 3D afbeeldingen.

**3d offset:** Denkbeeldige afstand van de kijker tot de aarde, alleen bij 3D plot.

**grafisch afbeelden:** Schakelt de grafische afbeelding in het geheel aan of uit.



Tabel 1: Onderzoek van basiseigenschappen

Fig.	E (MeV)	$\vec{v}(0)$ ( $R_e/s$ )	beschrijving
1	99.0	(0,0,-20)	Aanzicht op de noordpool en een plot van de straal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tegen de hoogte $z$ . Dit is een proton in de buitenste Van Allen gordel, met een vrij hoge energie. Duidelijk is het spiraaleffect te zien, evenals de precessie rond de dipoolas.
2	52.0	(0,0,-15)	3D-plot. Dit is een deeltje zoals in de vorige figuur, met een iets lagere energie.
3	110.0	(-15,0,-15)	3D-plot. Het equatorvlak van de dipool is iets naar voren gekanteld. Het plaatje toont een proton met een zeer hoge energie. Duidelijk is te zien dat de 'cirkels' veel groter zijn dan in bv. fig. 2.
4	110.0	(-15,0,-15)	Idem fig. 3. Het equatorvlak is nu evenwijdig aan het vlak van het papier (de figuur toont dus een aanzicht op de noordpool). In de projectie op het vlak is te zien dat in de buurt van de polen de protonen een baan beschrijven met een steeds kleinere kromtestraal, om vervolgens te worden teruggeduwd naar de andere pool. De beweging tussen de polen vertoont de typische helix-structuur.
5	82.0	(-13,0,-13)	Straal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ uitgezet tegen de hoogte boven het equatorvlak $z$ (projectie op het vlak $\phi = 0$ ). Duidelijk zichtbaar zijn de helix-paden en het reflectie-effect.
6	110	(-15,0,-15)	Het magneetveld oscilleert hier met een frequentie van 8Hz en een diepte van 0.15 (op het constante magneetveld is dus een sinus gesuperponeerd met een amplitude van 0.15 maal de sterkte van het constante veld). De geordende structuur uit figuur 2 is verdwenen. Wat de invloed van deze oscillatie precies is is in de volgende paragraaf bekeken.

## 6 Experimenten

### 6.1 Basis-eigenschappen v.d. bewegingen

Voor testdoeleinden en om meer inzicht te krijgen in het hoe en waarom van de bewegingen van de deeltjes, is eerst voor een aantal situaties een 2D of 3D plot gemaakt. Zie figuren 1 tot en met 6. Een beschrijving van de verschillende plaatjes staat in tabel 1 (waarbij  $E$  de energie van het proton en  $\vec{v}(0)$  de beginsnelheid, waarbij de afstandsschaal 1 maal de straal van de aarde is. De beginpositie van het deeltje is steeds (4,0,0), ook weer in aardstraal eenheden. Het deeltje waar het om draait is in alle gevallen een proton).

### 6.2 Variatie v.d. parameters $B_0$ , $\omega_B$ en $\vec{v}(0)$

Na de plaatjes waarin de basis-eigenschappen tot uiting komen zijn plaatjes gemaakt van 'multi-runs' waarbij de maximaal en minimaal bereikte afstand ( $r_{min}$  en  $r_{max}$ ) tot de aarde is uitgezet tegen de diverse parameters. Zie tabel 2.



Tabel 2: Variatie van diverse parameters

Fig.	$E$ (MeV)	$\vec{v}(0)$ ( $R_e/s$ )	$B$	beschrijving
7	58.0-202.0	(-15,0,-5)-(-15,0,-22)	const.	Bekeken is effect van de grootte van de (begin-)snelheidscomponent in de $z$ richting. Opmerkelijk is dat de maximale afstand vrijwel constant blijft, maar de minimale afstand veel kleiner wordt met het toenemen van de $z$ -snelheidscomponent. Zie 'Discussie' voor een verklaring.
8	110.0-110.0	(15,0,-15)-(-15,0,-15)	const.	Soortgelijke parameterverandering als bij fig. 6, maar hier wordt de $x$ -snelheidscomponent gevarieerd, bij constante $z$ -snelheid. Het maakt duidelijk niets uit of de $x$ -component naar binnen of naar buiten is gericht.
9	180	(-18,0,-18)	10Hz, 0-0.2	Een oscillatie in het $B$ -veld geeft een weinig systematisch gedrag te zien in de $r_{max}$ en $r_{min}$ . Diepere oscillaties zorgen ervoor dat het deeltje uit de gordel ontsnapt (niet getoond in de grafiek).
10	180	(-18,0,-18)	10Hz, 0-0.2	Hetzelfde als de vorige plot, maar meer metingen. Het gedrag uit de vorige grafiek is hier toch gewoon een lijn. De 'dip' in $r_{min}$ is vreemd. Zie 'Discussie'.
11	180	(-18,0,-18)	10-2.5Hz, 0.1	Er treedt een soort van resonantieverschijnsel op rond de 6Hz. Het effect is wederom eigenlijk alleen aanwezig in $r_{min}$ .





## 6.3 Simulatie v.d. zonnwind

Door het simuleren van een groot aantal deeltjes, afkomstig van de zon, is een poging gewaagd het verschijnsel zonnwind te simuleren. Helaas levert dit, naast de vrij grote rekentijd, het probleem op dat de discretisering van de zonnwind (tot een maximaal 100-tal deeltjes) eigenlijk veel te grof is. 100 deeltjes zijn te weinig om te komen tot een mooi stromingspatroon rond de aarde. Zie 'Discussie' voor suggesties voor een andere aanpak.

## 7 Discussie

### 7.1 Grafieken en plots

Uit de plaatjes 1 t/m 5 blijkt duidelijk het karakteristieke gedrag van geladen deeltjes in het dipoolveld. De andere plaatjes laten enkele minder te verwachten effecten zien:

**fig. 7:** Een grote waarde van de  $z$ -component van de snelheid t.o.v. de  $x$ -component zorgt ervoor dat de snelheid langs de veldlijn groot is in verhouding tot de snelheid van de cirkelbeweging. De straal van die cirkelbeweging is dus relatief klein, waardoor de convergentie van het magneetveld een relatief onbelangrijke rol speelt. Hierdoor kan dit deeltje de polen van de aarde zeer dicht naderen.

**fig. 8:** Hier is wederom te zien dat een kleine  $x$ -snelheid en een grote  $z$ -snelheid zorgen voor een dichte nadering. Aangezien het deeltje zich in de beginpositie op een relatief grote afstand van de aarde bevindt, maakt het vrijwel niets uit in welke richting de  $x$ -beginsnelheid wordt genomen.

Opmerkelijk bij deze twee figuren is dat de kortste naderingsafstand wel beïnvloed wordt door de beginsnelheid, maar de grootste verwijderingsafstand vrijwel niet. Dit komt voornamelijk omdat de veldlijnen op korte afstand van de aarde vrijwel in de radiële richting staan, maar op grotere afstand (in het equatorvlak) verticaal staan. Aangezien de deeltjes rond de veldlijnen cirkelen kan een toename van de maximaal bereikte afstand alleen komen van een grotere straal van de cirkelbewegingen. Die is echter relatief klein t.o.v. de maximaal bereikte afstand.

**fig. 9,10 en 11:** De oscillatiefrequentie van het magneetveld ligt hier in de grootte orde van de frequentie van de cirkelbeweging (zie vgl. (6), die op een afstand van  $4 R_e$  ongeveer 10 Hz is. Er is vrijwel geen verandering te zien in de bereikte afstanden, afgezien van de nogal vreemde 'dip' rond 6 Hz in figuur 10. Herhaling van dit experiment (met iets andere beginvoorwaarden) leverde een rechttere lijn op, zodat de 'dip' waarschijnlijk door een rekenfout veroorzaakt is. Volgens de literatuur zou een oscillerend magneetveld, zoals dat bijvoorbeeld bij Jupiter wordt aangetroffen (zie [4]), een vrij groot effect hebben op de vorm van de gordels. Dat is hier helaas niet waargenomen.

### 7.2 Zonnwind

Het verschijnsel zonnwind is waarschijnlijk alleen goed te simuleren indien er veel rekenkracht beschikbaar is, of wanneer er een geheel andere aanpak wordt gehanteerd. Deze zou moeten bestaan uit het beschrijven van de stroom zonnwind-deeltjes als een soort vloeistof. Duidelijk is wel dat hier niet gewoon van de Navier-Stokes vergelijkingen kan worden uitgegaan; de magnetische kracht werkt wezenlijk anders dan de krachten die normaliter tussen vloeistofdeeltjes werkzaam zijn.



### 7.3 Suggesties ter verbetering

Voor het verbeteren van het programma zou vooral de invloed van de zonnewind moeten worden bekeken. Aangezien de gegevens hierover in de literatuur zeer minimaal zijn, vergt dit waarschijnlijk nog erg veel experimenteerwerk.

Verder zou de invloed van de aardatmosfeer (wrijving etc.) op de beweging kunnen worden meegenomen, evenals het invang-effect van deeltjes uit de zonnewind in de gordels.

## 8 Literatuur

- [1] Brian J. O'Brien, *Sci. Am.*
- [2] Landau & Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon, 1951
- [3] Huggins & Lelek, *Am. J. Phys* 47(11), Nov 1979.
- [4] J.M. Pasachoff, *Contemporary Astrophysics*, Saunders, 1985



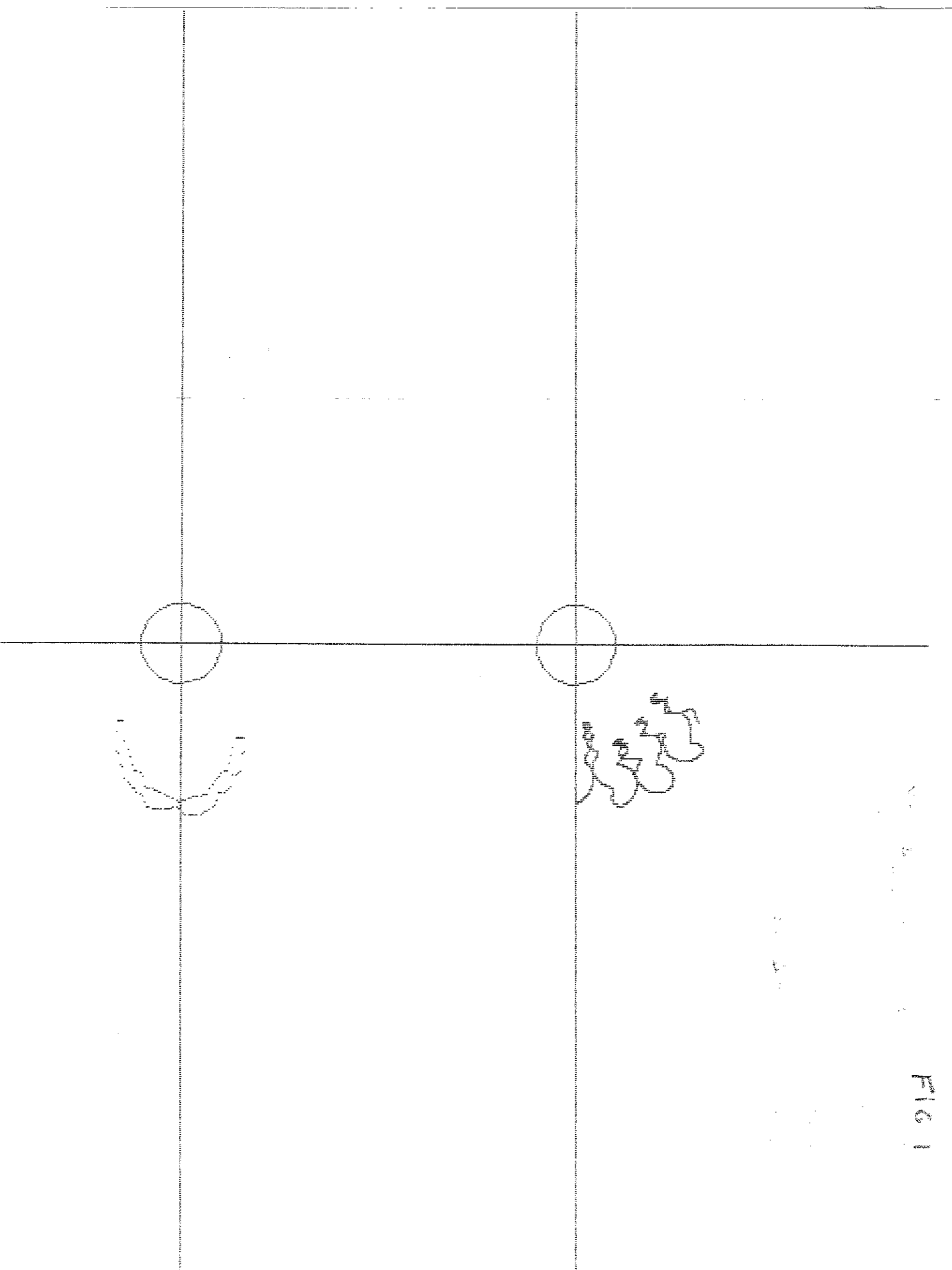


FIG 1



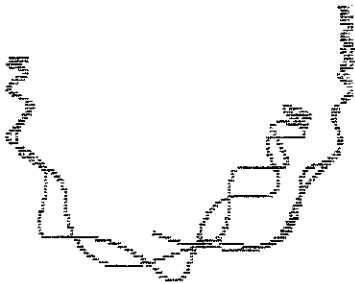
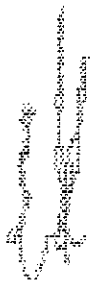
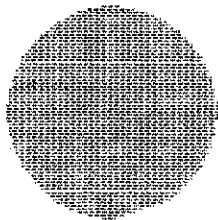
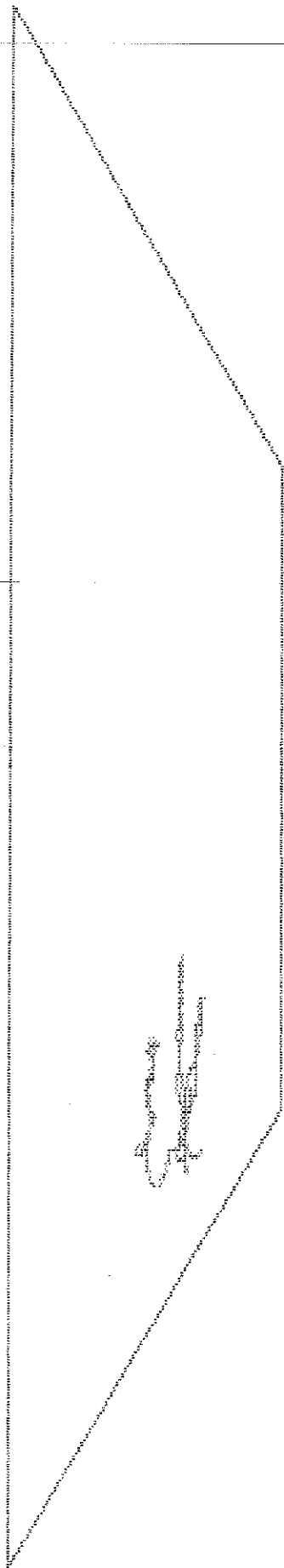


FIG. 2

FIG. 2





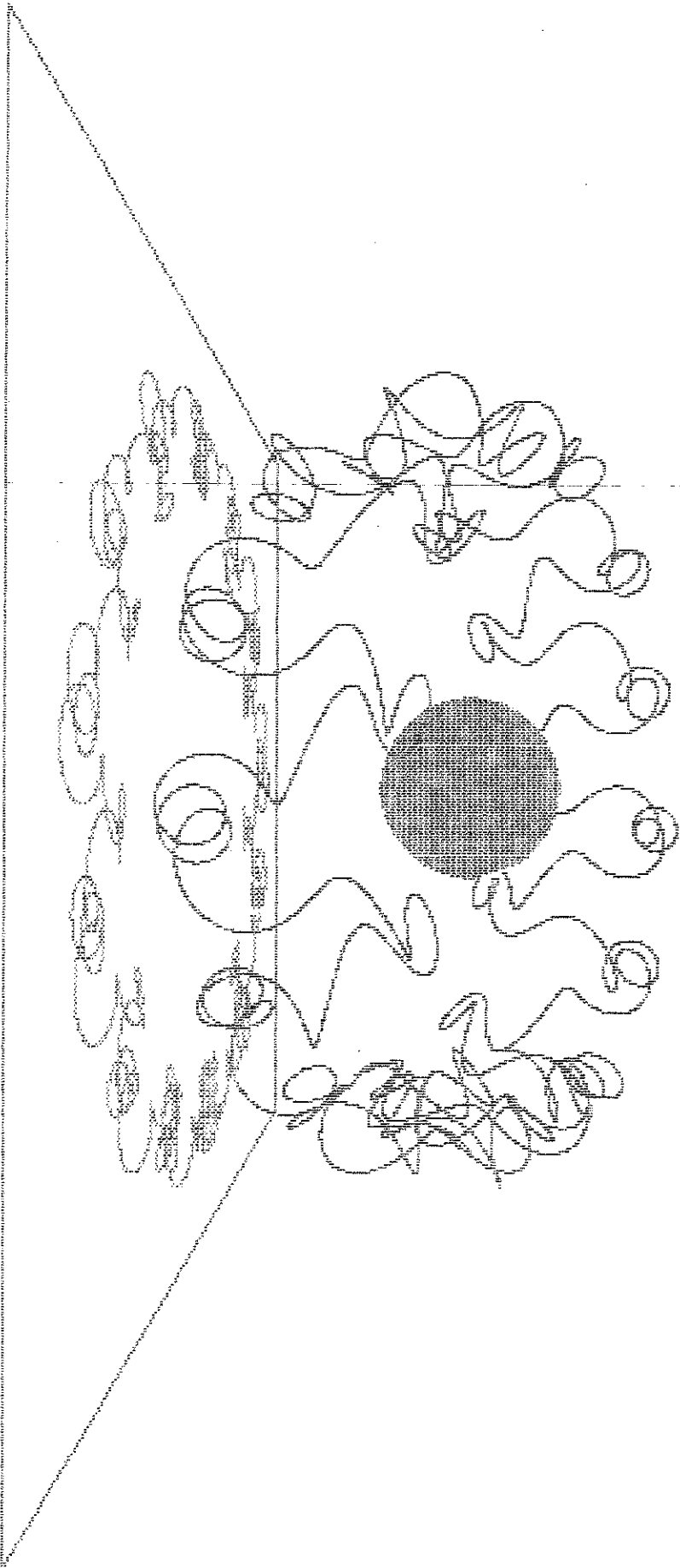


Fig 3



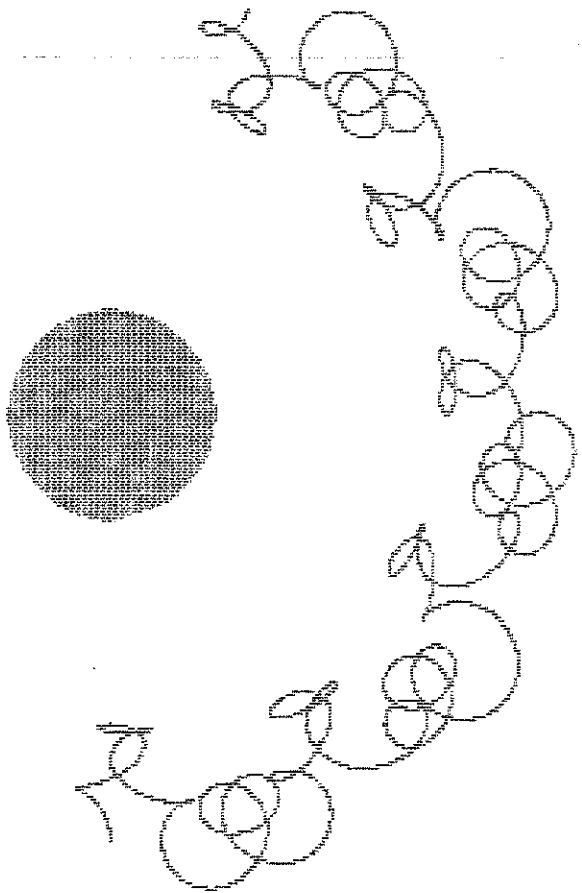
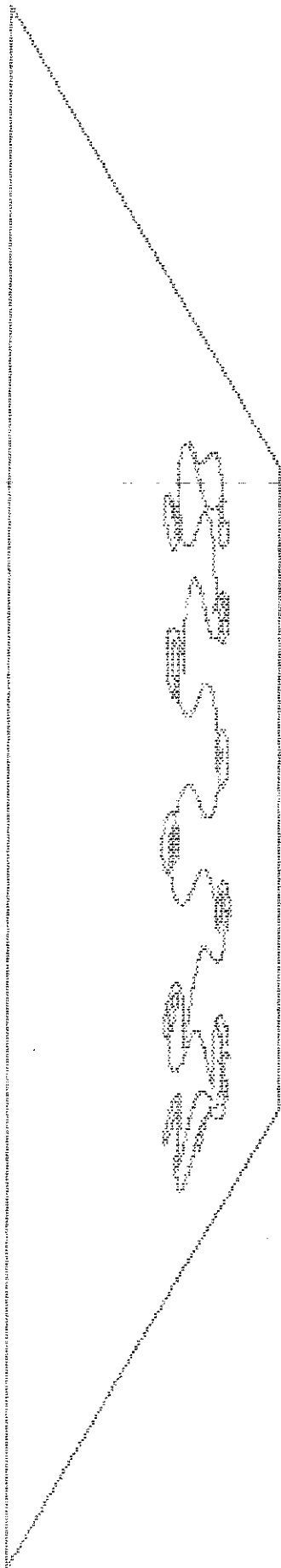


Fig. 1



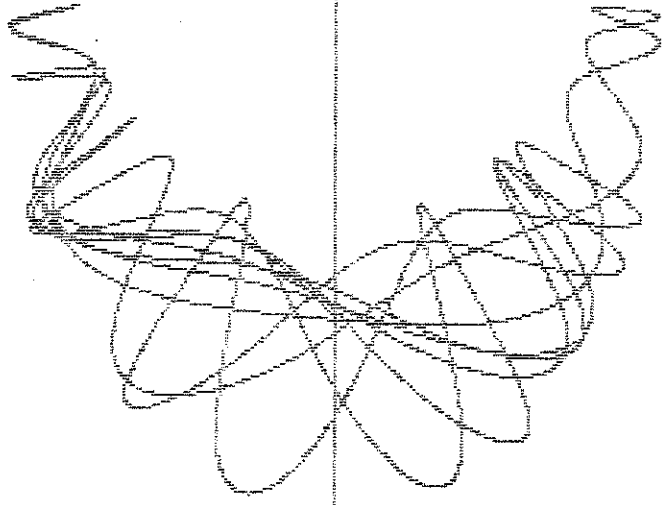
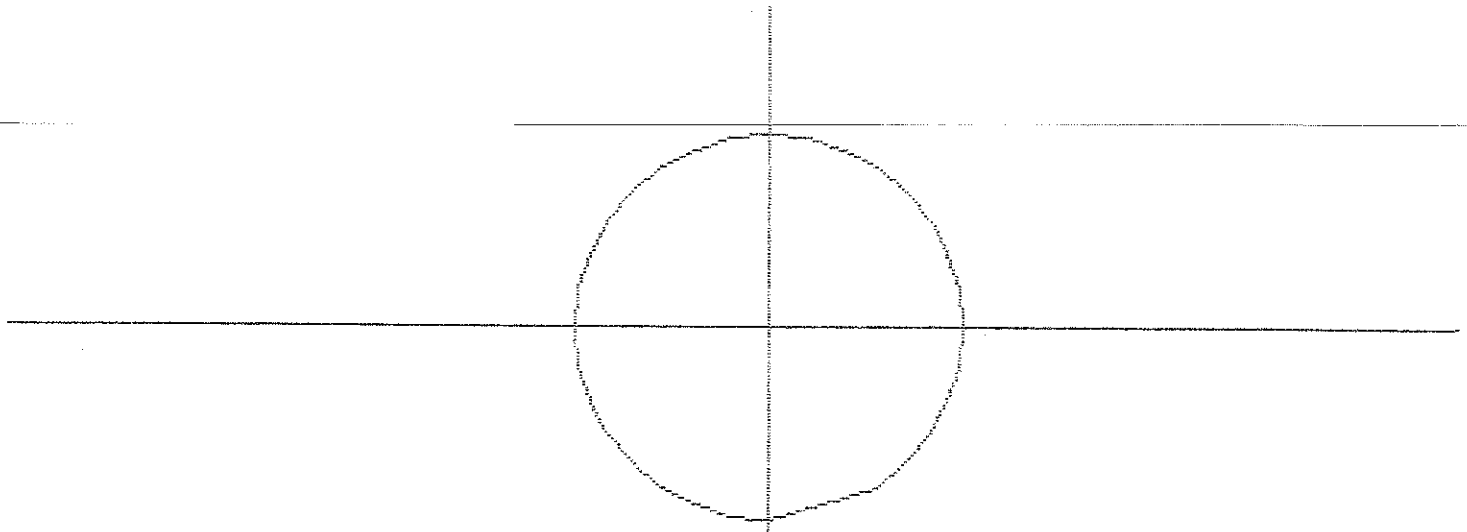
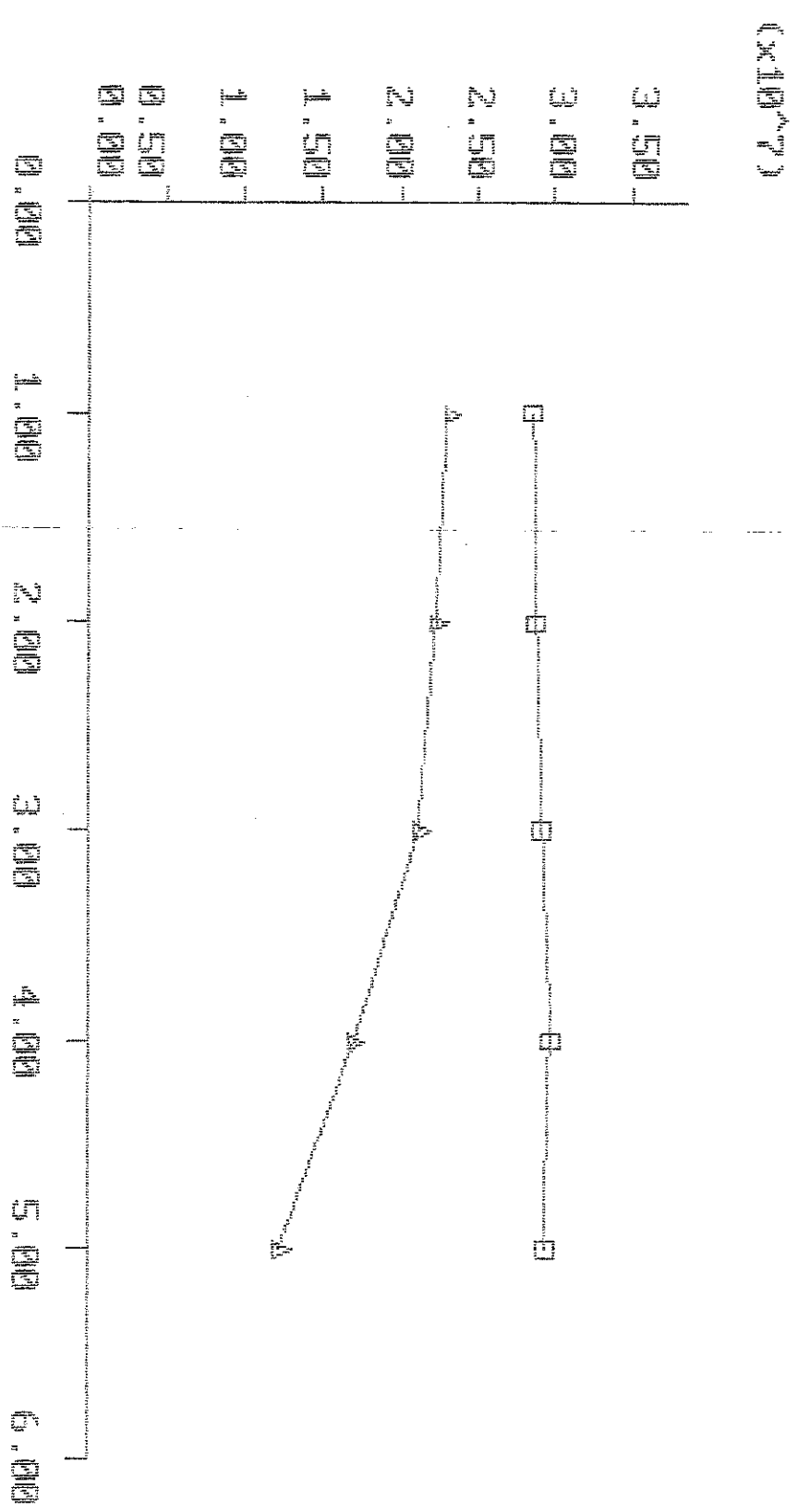


FIG 5

1000



Fig 6







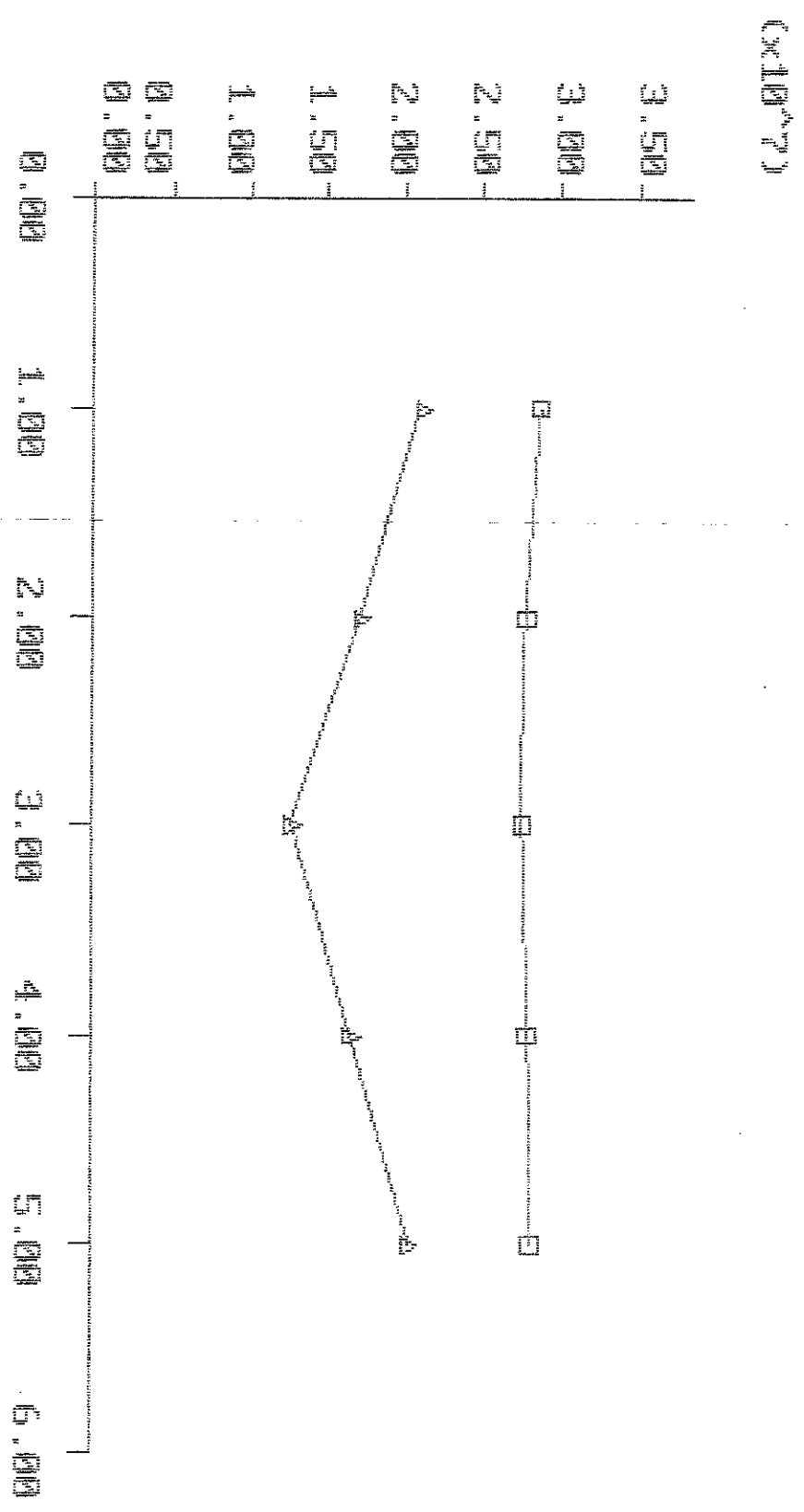




FIG 5

(X10<sup>7</sup>)

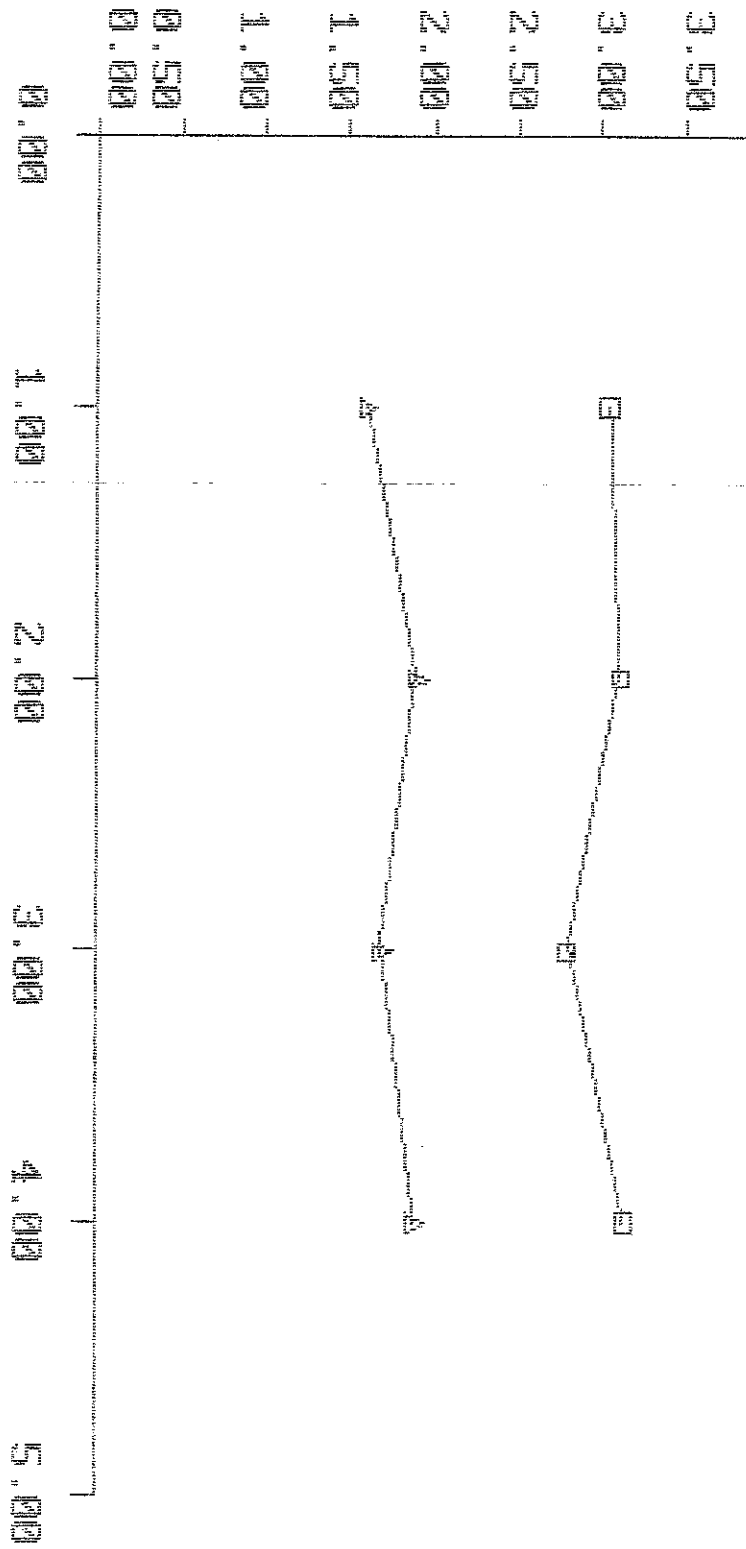




Figure 1

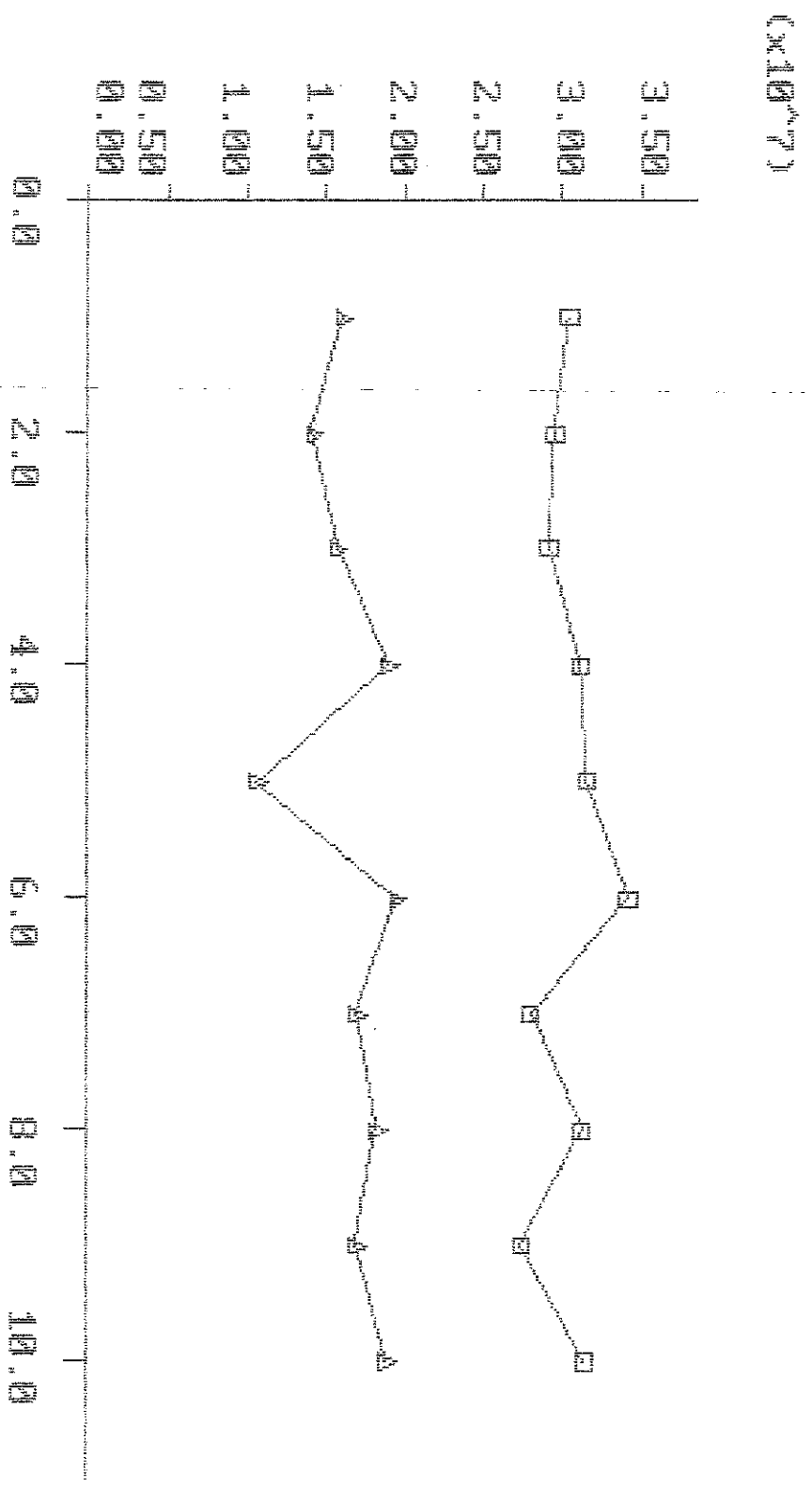
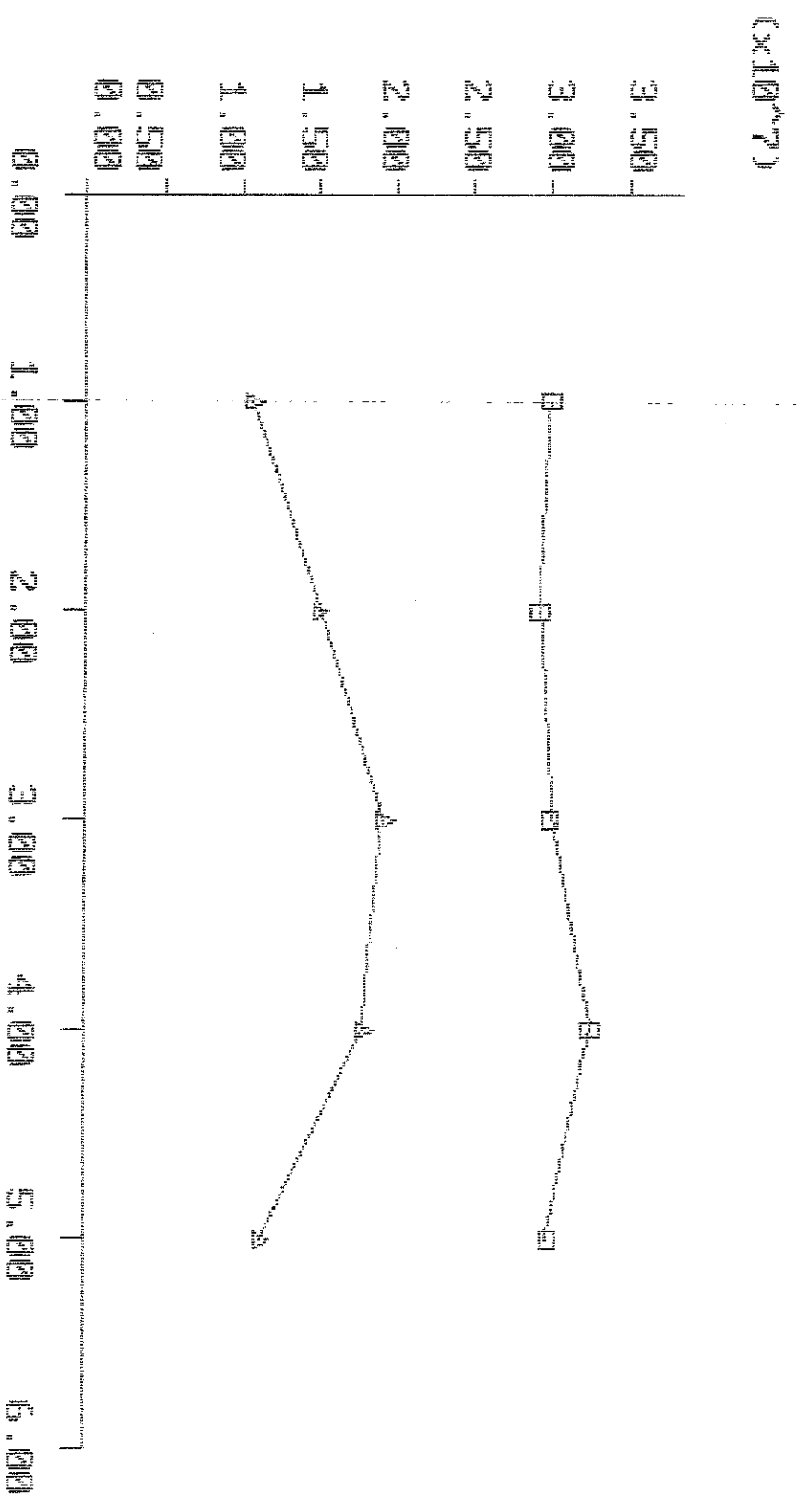




Fig. 10







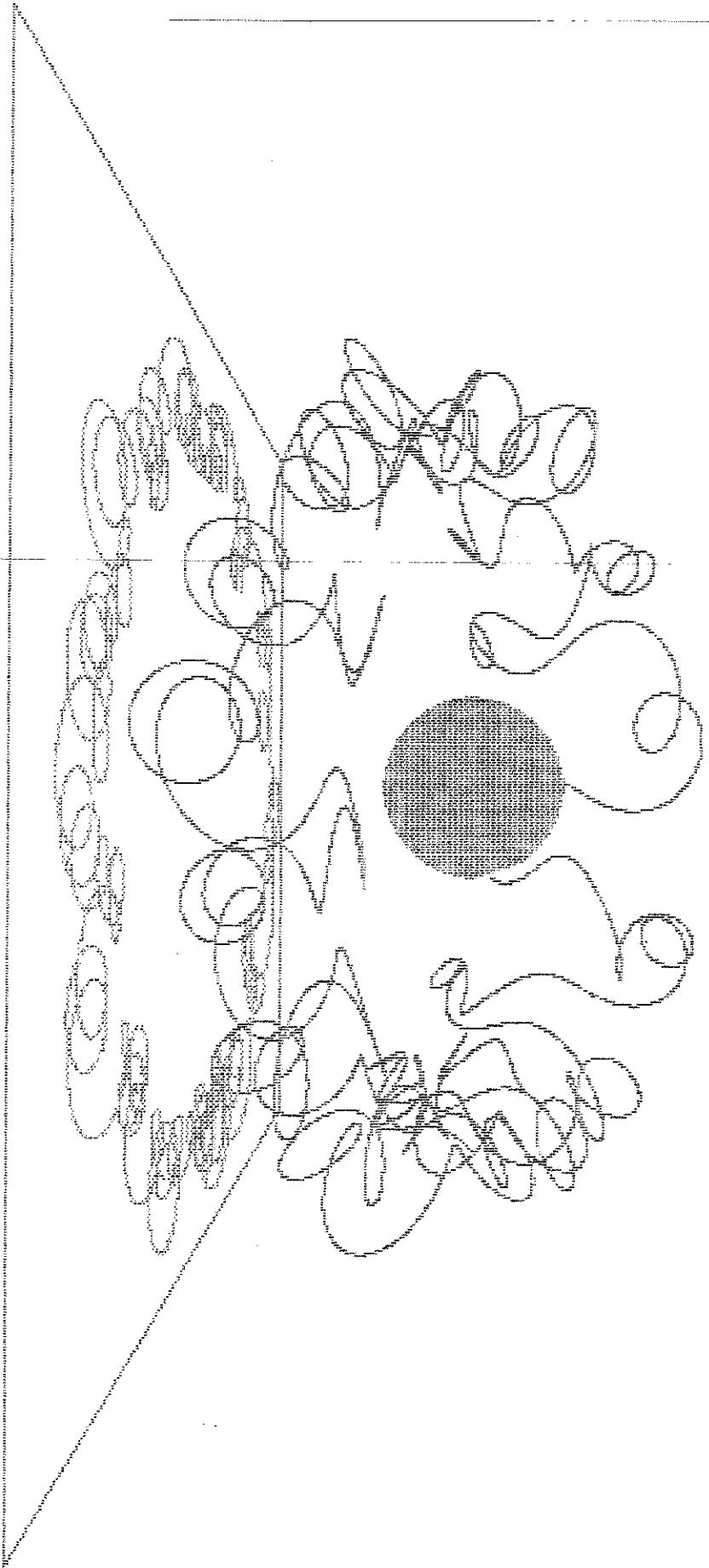


Figure 11

