1 VRIJE TRILLINGEN

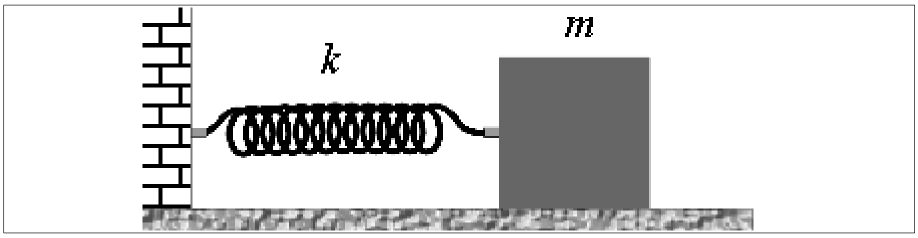
1.0 INLEIDING

Veel fysische systemen, van groot tot klein, mechanisch en elektrisch, kunnen trillingen uitvoeren. Daarom is in de natuurkunde het bestuderen van trillingen van groot belang. Als de systemen de trillingen zelfstandig, zonder aandrijving van buitenaf, uitvoeren spreken we van *vrije* trillingen.
We beginnen met de invoering van het begrip *harmonische oscillator*. Dit is een verzamelnaam voor eenvoudige fysische modelsystemen die de twee essentiële eigenschappen (*traagheid* en *stijfheid*) bevatten die voor harmonische trillingen nodig zijn. We geven enkele voorbeelden van modelsystemen die het gedrag van de harmonische oscillator vertonen.
Vervolgens kijken we ook naar een paar modelsystemen waarin afwijkingen van dit gedrag optreden.

1.1 HARMONISCHE OSCILLATOREN

1.1.1 het massa-veersysteem

Stel een veer met veerconstante k zit met één uiteinde vast aan een muur, en met het andere uiteinde aan een blok met massa m dat op een gladde vloer ligt (figuur 1.1). Stel ook dat de veer steeds in de x-richting loodrecht op de muur wijst. Als de veer niet is uitgerekt of ingedrukt bevindt het blok zich in de evenwichtsstand $x = 0$. We weten uit ervaring dat elke vrije beweging van het systeem van veer plus blok een trilling om de evenwichtsstand moet zijn.



figuur 1.1

- Wat betekent het dat de veer een veerconstante k heeft?
- Beredeneer zonder iets uit te rekenen wat er gebeurt als we het systeem een uitwijking geven.

We maken van dit systeem een modelsysteem door aan te nemen dat k en m de enige grootheden zijn die er in voorkomen. Dus we maken een idealisatie waarin het blok geen afmetingen heeft, de veer geen demping vertoont, de vloer volkomen glad is, enzovoort. We noemen dit fysische modelsysteem het massa-veersysteem. Het massa-veersysteem heeft de eigenschappen van een harmonische oscillator.

wiskundige beschrijving

De *bewegingsvergelijking* beschrijft hoe dit eenvoudige mechanische systeem zich gedraagt als functie van de tijd. Dit is niets anders dan de tweede wet van Newton:

$$F = ma \qquad [1.1]$$

- Wat stellen F en a in de tweede wet van Newton voor?

We nemen aan dat het systeem *vrij* is. Hiermee bedoelen we dat er geen uitwendige krachten aanwezig zijn, zodat de tot het systeem behorende veerkracht de enige werkzame kracht is. Er geldt dus bij een uitwijking x:

$$F = -kx \qquad [1.2]$$

Het minteken geeft aan dat de veerkracht een *terugdrijvende kracht* is.
Combinatie van [1.1] en [1.2] leidt tot de bewegingsvergelijking

$$ma + kx = 0 \qquad [1.3]$$

Vergelijking [1.3] is een *lineaire differentiaalvergelijking* van de vorm

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad [1.4]$$

waarin t de tijd voorstelt.

- Wat is de onbekende in deze differentiaalvergelijking?

Zoals we direct zullen zien is het handig om [1.4] te schrijven als

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \qquad [1.5]$$

waarin dus als notatie is gebruikt:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \qquad [1.6]$$

Vergelijking [1.5] wordt de *differentiaalvergelijking van de vrije harmonische oscillator* genoemd.
De oplossingen van [1.5] zijn functies van de gedaante

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \qquad [1.7]$$

Deze zijn ook te schrijven is als

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta)} \qquad [1.8]$$

De oplossingen [1.7] of [1.8] heten *harmonische trillingen* met *hoekfrequentie* ω_0. In [1.8] heet A de *amplitude* en $\omega_0 t - \beta$ de *fasehoek*.

- Ga na dat [1.7] en [1.8] beide voldoen aan [1.5].

Het verband tussen ω_0, de *frequentie* f_0 en de *periode* T_0 van de trillingen wordt gegeven door

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad [1.9]$$

De SI-eenheid voor ω_0 is s^{-1} (de benaming $s^{-1} = Hz$ gebruiken we alleen voor de SI-eenheid van de frequentie f_0).

- Ga door invullen van [1.9] in [1.8] na dat T_0 in [1.9] inderdaad de periode voorstelt.

systeemgrootheden en begincondities

De systeemgrootheden k (veerconstante) en m (massa) beschrijven respectievelijk de *stijfheid* en de *traagheid* van het massa-veersysteem.
De hoekfrequentie ω_0 wordt volgens [1.6] door deze systeemgrootheden vastgelegd. Ook de periode T_0 hangt dus uitsluitend van de systeemgrootheden af.

- Druk T_0 uit in k en m.

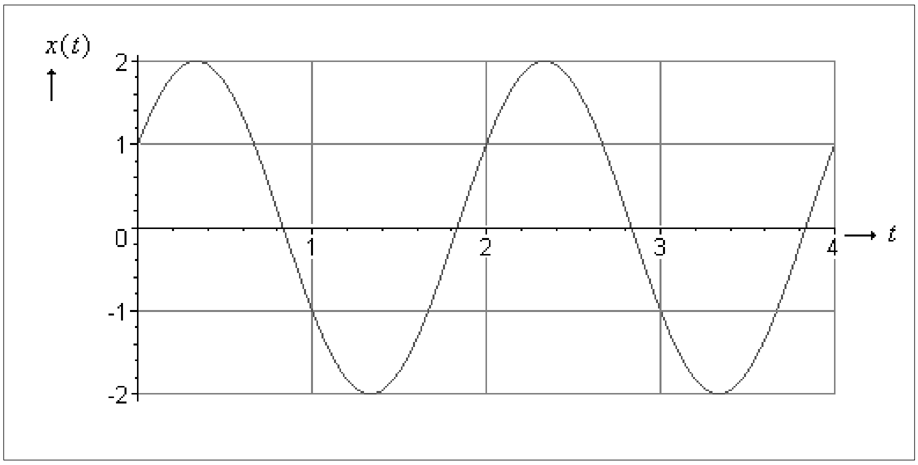
Naast ω_0 bevatten de oplossingen nog de parameters a en b in [1.7], dan wel A en β in [1.8]. Deze parameters worden niet door de systeemgrootheden bepaald, maar door de toevallige *begincondities*: zij zijn bijvoorbeeld uit te drukken in de uitwijking $x(0)$ en de snelheid $v(0)$ op het tijdstip $t = 0$. Er geldt:

$$a = A\cos\beta = x(0) \qquad [1.10a]$$

$$b = A\sin\beta = \frac{v(0)}{\omega_0} \qquad [1.10b]$$

- Controleer [1.10a] en [1.10b].

In figuur 1.2 is [1.8] grafisch uitgezet.



figuur 1.2

- Ga na welke waarden hier gekozen zijn voor ω_0, A en β.
  Bepaal ook a en b.

energiebeschouwing

De totale energie E van het massa-veersysteem is de som van de kinetische energie E_k en de potentiële energie E_p:

$$E = E_k + E_p \qquad [1.11]$$

waarbij E_k en E_p met behulp van [1.6], [1.8] en $v = \frac{dx}{dt}$ worden gegeven door

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t - \beta) = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t - \beta) \qquad [1.12a]$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \beta) = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2\cos^2(\omega_0 t - \beta) \qquad [1.12b]$$

Uit invullen van [1.12] in [1.11] blijkt dat E niet van t afhangt:

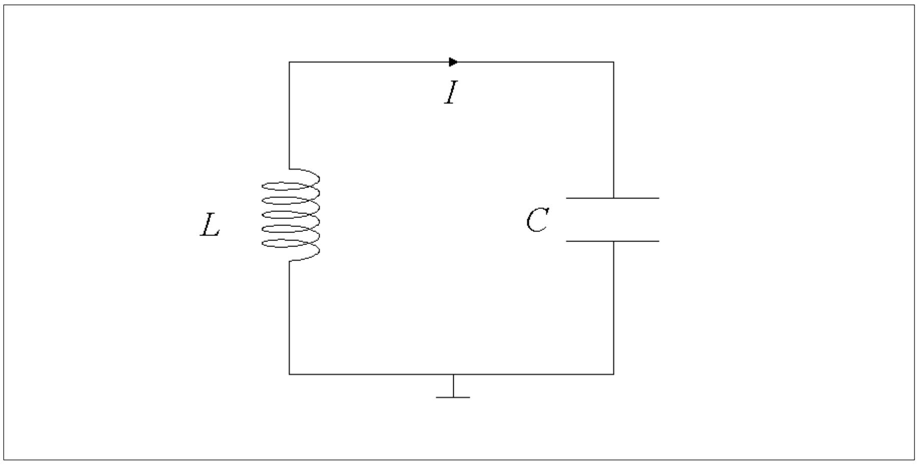
$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2} \qquad [1.13]$$

De som van de kinetische energie en de potentiële energie van het massa-veersysteem is dus constant in de tijd.

- Gebruik de substituties $\sin^2\alpha \equiv \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ en $\cos^2\alpha \equiv \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ om na te gaan dat E_k en E_p elk afzonderlijk periodieke functies van de tijd zijn met periode $\frac{1}{2}T_0$.

1.1.2 de *LC*-kring

Onder de *LC*-kring verstaan we een ideale elektrische kring (figuur 1.3), uitsluitend opgebouwd uit een condensator met capaciteit C en een spoel met zelfinductiecoëfficiënt L. Ook dit modelsysteem blijkt harmonische trillingen te kunnen uitvoeren.



figuur 1.3

In de *vrije LC*-kring (er is geen uitwendige spanning aanwezig) moet volgens de wet van Kirchhoff de spanning over de spoel gelijk zijn aan die over de condensator, zodat

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} \qquad [1.14]$$

waarin de stroom I door de spoel en de lading q op de condensator samenhangen volgens

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad [1.15]$$

Differentiëren van [1.15] en invullen in [1.14] leidt tot de differentiaalvergelijking voor de *LC*-kring:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \qquad [1.16]$$

analogie met massa-veersysteem
Het valt op dat de vergelijkingen [1.4] en [1.16] dezelfde wiskundige gedaante hebben. Ook [1.16] is dus te schrijven op de manier van [1.5]:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \qquad [1.17]$$

met als oplossingen de harmonische trillingen

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \qquad [1.18]$$

waarin de hoekfrequentie ω_0 nu bepaald wordt door

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \qquad [1.19]$$

De LC-kring is dus een harmonische oscillator. Het gedrag in de tijd wordt hier beschreven uitgaande van de wet van Kirchhoff in de vorm van [1.14]. De rol van de uitwijking x wordt overgenomen door de lading q, die van de snelheid v door de stroom I.

- Geef aan welke systeemgrootheden in de LC-kring de rol van m (traagheid), respectievelijk die van k (stijfheid) overnemen.

- Leg uit dat $I(t)$, net als $q(t)$, periodiek varieert met hoekfrequentie ω_0 en dus voldoet aan [1.20]:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0 \qquad [1.20]$$

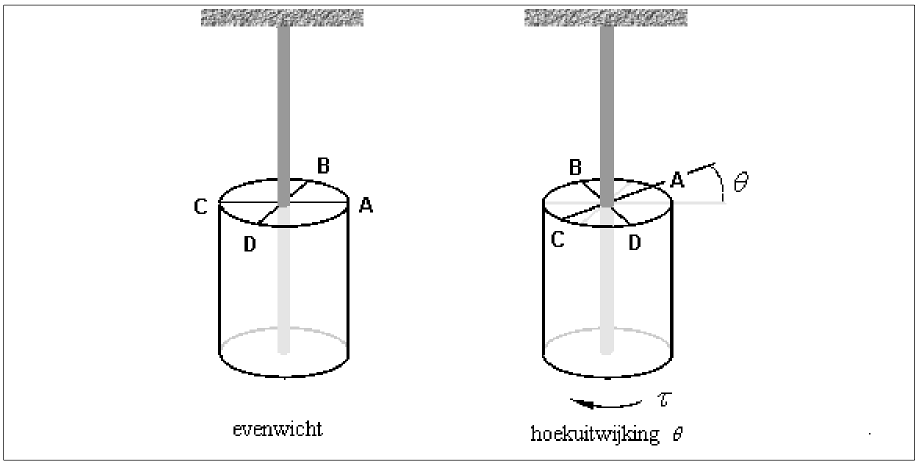
De totale energie E van de LC kring is

$$E = \tfrac{1}{2}LI^2 + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad [1.21]$$

- Laat zien dat ook hier E constant is in de tijd.

1.1.3 torsietrillingen

Stel een cilinder met traagheidsmoment J hangt aan een draad (figuur 1.4). Als de cilinder over zekere hoek θ gedraaid wordt oefent de draad een terugdrijvend krachtmoment τ uit dat evenredig is met θ:



figuur 1.4

$$\tau = -\kappa\theta \qquad [1.22]$$

(κ heet de *torsieconstante*). Hierdoor ontstaat bij loslaten een *torsietrilling* met differentiaalvergelijking

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0 \qquad [1.23]$$

De oplossingen hebben opnieuw de vorm van harmonische trillingen:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \qquad [1.24]$$

waarin

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{J} \qquad [1.25]$$

- Geef een formule voor de periode van de torsietrilling. Klopt de dimensie?

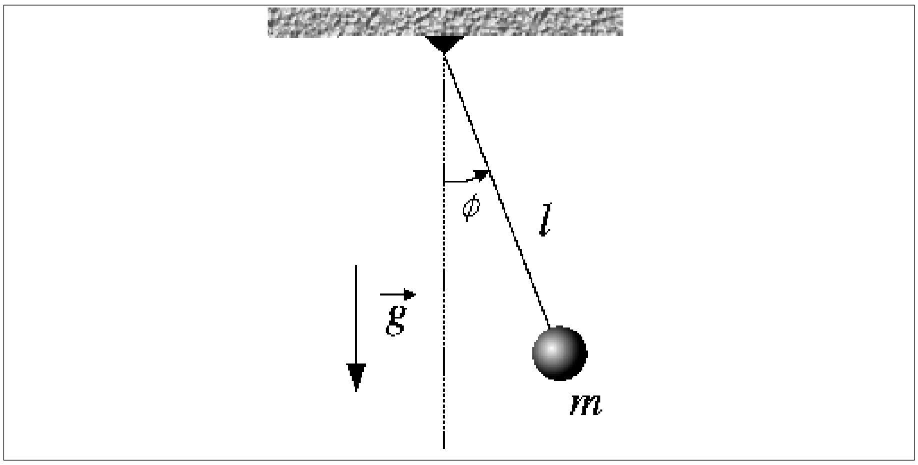
1.2 AFWIJKINGEN VAN HARMONISCH GEDRAG

Er zijn veel fysische systemen, alle gekenmerkt door een traagheid en een stijfheid, die zich in sterke mate gedragen als een harmonische oscillator. We noemen echter twee voorbeelden van afwijkingen:
Bij grotere uitwijkingen kan, zoals bij een *slinger*, het harmonisch gedrag verloren gaan doordat de

terugdrijvende kracht niet evenredig is met de uitwijking (de gevolgen kunnen zeer ingrijpend zijn).
Bij elk *gedempt* systeem gaat het harmonisch gedrag verloren doordat er behalve een traagheidsgrootheid en een stijfheidsgrootheid ook een *dempings*grootheid aanwezig is.

1.2.1 de slinger

We bekijken een *slinger* als voorbeeld van een *niet-lineair systeem*: bij grote uitwijkingen zal duidelijk blijken dat de beweging geen harmonische trilling is.
De ééndimensionale slinger in figuur 1.5 bestaat uit een massaloze staaf waaraan een massa *m* zit die bij een hoekuitwijking ϕ, uitgaande van de evenwichtsstand, langs een cirkelboog een afstand $l\phi$ heeft afgelegd. De terugdrijvende kracht is de tangentiële component $-mg\sin\phi$ van de zwaartekracht op *m*; de tangentiële versnelling is $l\frac{d^2\phi}{dt^2}$. De vergelijking voor de beweging langs de cirkelboog wordt dus de *niet-lineaire differentiaalvergelijking*



figuur 1.5

$$ml\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\sin\phi \qquad [1.26]$$

Als we $\sin\phi$ ontwikkelen in een Taylorreeks volgt uit [1.26], onafhankelijk van *m*:

$$l\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\bullet(\phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{120}\phi^5 + O(\phi^7)) \qquad [1.27]$$

Alleen voor voldoend kleine ϕ mogen we de hogere orde-termen verwaarlozen. Dan ontstaat als benadering toch weer een lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega_0^2\phi \qquad [1.28]$$

waarin

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad [1.29]$$

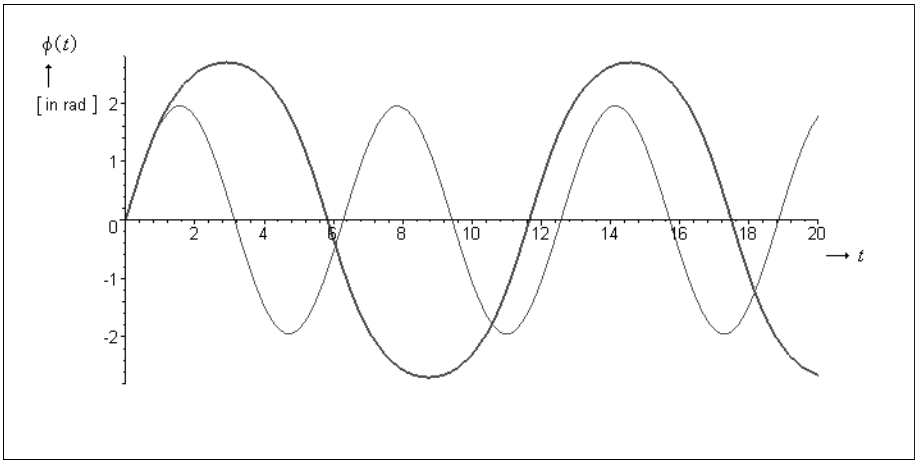
Voor grotere ϕ moeten we echter uitgaan van de niet-lineaire vergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\phi \qquad [1.30]$$

(met daarin dezelfde ω_0) die we het beste numeriek kunnen oplossen.

- Verwacht je als oplossing van [1.30] een harmonische beweging? Een periodieke beweging? Met een hoekfrequentie groter, gelijk aan of kleiner dan ω_0?

We zetten als voorbeeld in figuur 1.6 een oplossing van [1.30] uit waarbij de slinger een flinke zet krijgt en ongeveer 155° uitslaat (gekozen is $\omega_0 = 1$). De grafiek hiervan is géén sinuslijn. Ter vergelijking is (dunne lijn) de oplossing van [1.28] weergegeven met dezelfde begincondities.



figuur 1.6

1.2.2 demping

Een systeem met een traagheid, een stijfheid én een demping noemen we een *gedempte harmonische osillator*.
We zullen hieronder zowel voor het massa-veersysteem als voor de *LC*-kring nagaan hoe het gedrag verandert als er een dempingsgrootheid wordt toegevoegd.

mechanisch systeem

- Een opstelling bestaand uit een massa m, hangend aan een veer met veerconstante k, wordt in zijn geheel in een vloeistof gedompeld. Probeer zonder iets uit te rekenen het gedrag te voorspellen
  1) voor grote waarden van m en k;
  2) voor kleine waarden van m en k.

Om de bewegingsvergelijking van het massa-veersysteem te krijgen vulden we in de tweede wet van Newton voor de totale kracht F de terugdrijvende kracht $-kx$ van het systeem in. Echter, in de praktijk zal de vrije beweging van een massa aan een veer door wrijving ook demping vertonen. Om dit te beschrijven breiden we het modelsysteem uit met een dempingskracht, waarvan we eenvoudigheidshalve veronderstellen dat hij evenredig is met de snelheid, en tegengesteld daaraan. We nemen weer aan dat het systeem vrij is: uitwendige krachten veronderstellen we afwezig.
In plaats van [1.2] krijgen we dan voor de totale kracht bij een uitwijking x en een snelheid v:

$$F = -\lambda v - kx \qquad [1.31]$$

en in plaats van [1.3] voor de bewegingsvergelijking:

$$ma + \lambda v + kx = 0 \qquad [1.32]$$

De nieuw optredende systeemgrootheid λ heet de *dempingsconstante*.
We kunnen het gedrag van het vrije systeem berekenen door [1.32] op te vatten als een lineaire differentiaalvergelijking:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad [1.33]$$

We nemen aan dat de dempingskracht ook nog evenredig is met m, zodat we mogen stellen dat

$$\lambda = 2m\gamma \qquad [1.34]$$

(we zullen γ het dempingsgetal noemen). Dan kunnen we [1.33] met behulp van [1.6] ook schrijven in de vorm

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \qquad [1.35]$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de *vrije gedempte harmonische oscillator*.

- Geef de SI-eenheden waarin λ en γ moeten worden uitgedrukt.

De algemene oplossing (voor $\gamma \neq \omega_0$) van [1.35] is een lineaire combinatie van twee e-machten:

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t} \qquad [1.36]$$

Bij gegeven ω_0 hangt het af van de grootte van γ hoe deze oplossing zich gedraagt.

zwakke demping

We spreken van *zwakke demping* als het (positieve) dempingsgetal γ voldoet aan

$$\gamma < \omega_0 \qquad [1.37]$$

De vorm $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ uit [1.36] is dan imaginair, en we definiëren een (positieve) grootheid ω_1:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \qquad [1.38]$$

De oplossing [1.36] schrijven we nu in de gedaante

$$x(t) = e^{-\gamma t} \bullet (c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_1 t)}) \qquad [1.39]$$

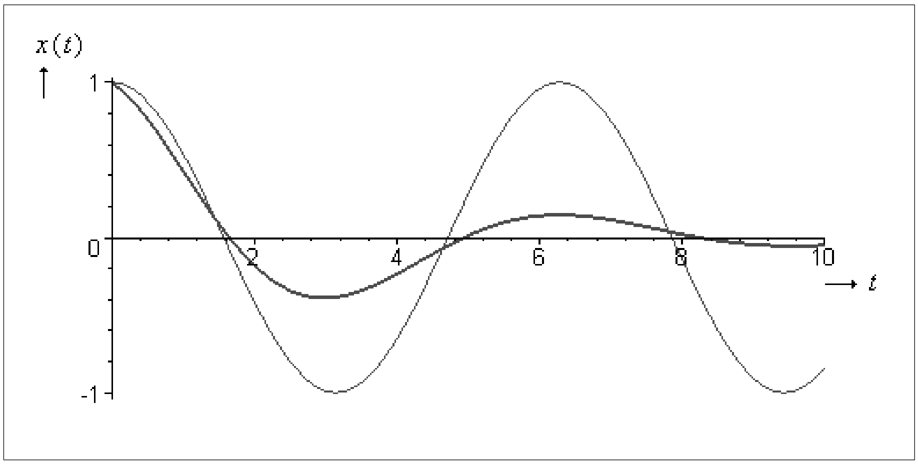
wat gelijkwaardig is met

$$x(t) = e^{-\gamma t} \bullet (a\cos\omega_1 t + b\sin\omega_1 t) \qquad [1.40]$$

ofwel

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t} A\cos(\omega_1 t - \beta)} \qquad [1.41]$$

Dit resultaat, dat dus optreedt bij zwakke demping, stelt een *vrije gedempte trilling* voor.
We vergelijken [1.41] met de oplossing [1.8] voor de ongedempte harmonische oscillator.



figuur 1.7

We zien in de eerste plaats dat er in [1.41] een extra *dempingsfactor* $e^{-\gamma t}$ in de amplitude voorkomt, zodat de trilling uitsterft. Bovendien is de *eigenhoekfrequentie* ω_0 van de *ongedempte* oscillator vervangen door de kleinere hoekfrequentie $\omega_1$uit [1.38].

In figuur 1.7 is [1.41] uitgezet voor $\gamma = 0.3\omega_0$, met $\omega_0 = 1$, $A = 1$ en $\beta = 0$. Ter vergelijking is ook (dunne lijn) de trilling voor $\gamma = 0$ weergegeven.

- Bekijk voor beide grafieken de ligging van de nulpunten en geef je commentaar. Wat verwacht je te zien als $\gamma = \omega_0$?

energiebeschouwing

Ook voor het zwak gedempte mechanische systeem kunnen we de energie $E = E_k + E_p$ uit [1.11] bekijken. Deze som is hier natuurlijk niet constant, maar neemt af doordat de dempingskracht negatieve arbeid op het systeem verricht.
Voor voldoend kleine γ mag in [1.41] ω_1 vervangen worden door ω_0, terwijl de dempingsfactor $e^{-\gamma t}$ slechts langzaam varieert. In benadering geldt dan dus

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &\simeq \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma t}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t - \beta) + \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma t}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \beta) \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2e^{-2\gamma t} \end{aligned} \qquad [1.42]$$

Vergelijken we dit met [1.13] dan zien we een extra dempingsfactor die in dit geval $e^{-2\gamma t}$ bedraagt: E neemt dus 2 keer zo snel af als de amplitude van x.

kritische en sterke demping

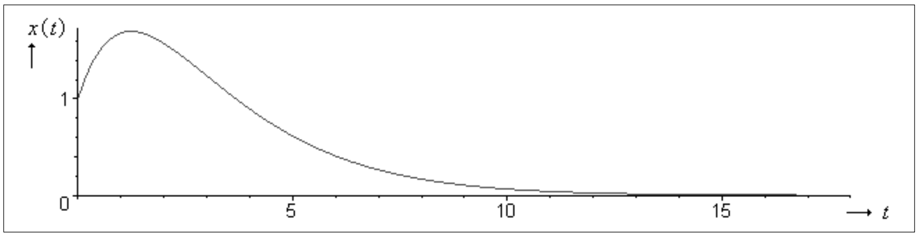
Naarmate γ groter gekozen wordt is het verval van de trilling sterker en is bovendien volgens [1.38] de hoekfrequentie ω_1 kleiner. Als $\omega_1 = 0$ geworden is, noemen we de trilling *kritisch gedempt*: er treden net geen oscillaties meer op. De voorwaarde hiervoor is kennelijk

$$\gamma = \omega_0 \qquad [1.43]$$

Aan te tonen is dat er dan in plaats van [1.36] als oplossing komt:

$$x(t) = c_3e^{-\omega_0 t} + c_4te^{-\omega_0 t} \qquad [1.44]$$

waarin c_3 en c_4 nader bepaald worden door de begincondities. Voor grote waarden van t overheerst in deze oplossing de tweede term; een voorbeeld is getekend in figuur 1.8.

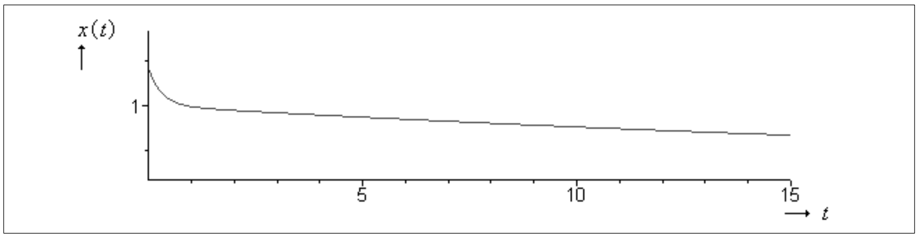


figuur 1.8

Van *sterke demping* spreken we als

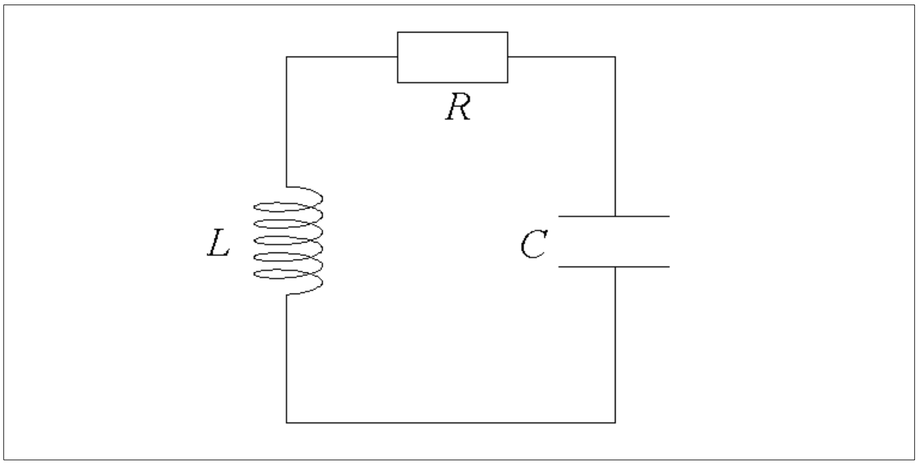
$$\gamma > \omega_0 \qquad [1.45]$$

De oplossing is ook dan niet periodiek; hij heeft de vorm [1.36] met daarin nu twee reële e-machten. Voor zeer sterke demping zal *kruipen* optreden (figuur 1.9): de evenwichtsstand wordt veel langzamer benaderd dan bij kritische demping.



figuur 1.9

elektrisch systeem



figuur 1.10

Als in een LC-kring een kleine weerstand R wordt opgenomen (figuur 1.10) ontstaat een LRC-kring waarin een gedempte elektrische trilling op kan treden. In de praktijk is de ohmse weerstand van de spoel al zo'n kleine weerstand. Analoog met [1.33] en [1.34] geldt

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad [1.46]$$

$$R = 2L\gamma \qquad [1.47]$$

Om het gedrag van de oplossing $q(t)$ te bepalen moet nu de dempingsconstante $\gamma = \frac{R}{2L}$ uit [1.47] worden vergeleken met $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (zie [1.19]).

- Hoe gedragen zich voor voldoend zwakke demping
  1) de spanning $\frac{q}{C}$ over de condensator;
  2) de stroom I in de kring;
  3) de energie E uit [1.21]?

1.3 SAMENVATTING

1. Een ongedempte harmonische oscillator wordt gekenmerkt door twee systeemgrootheden: stijfheid (bijvoorbeeld veerconstante) en traagheid (bijvoorbeeld massa).

2. De vergelijking voor de 'uitwijking' van een harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad [1.5]$$

3. Hierin is ω_0^2 gelijk aan de stijfheid gedeeld door de traagheid; voor het massa-veersysteem:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad [1.6]$$

en voor de LC kring (met lading als 'uitwijking'):

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad [1.19]$$

4. De oplossingen voor de uitwijking zijn

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \beta) \qquad [1.8]$$

waarin A en β afhankelijk zijn van de begincondities.

5. De totale (kinetische plus potentiële) energie van een harmonische oscillator is constant in de tijd:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \qquad [1.13]$$

6. Een oscillator met een niet constante stijfheid kan bij grote uitwijkingen duidelijke afwijkingen van harmonisch gedrag vertonen.

7. Een gedempte harmonische oscillator wordt gekenmerkt door drie systeemgrootheden: stijfheid, dempingsconstante en traagheid.

8. De vergelijking voor de 'uitwijking' van een gedempte harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \qquad [1.35]$$

9. Hierin is ω_0^2 de stijfheid gedeeld door de traagheid, en 2γ de dempingsconstante gedeeld door de traagheid; voor het gedempte massa-veersysteem:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad [1.6], [1.34]$$

en voor de *LRC* kring:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},\ 2\gamma = \frac{R}{L} \qquad [1.19], [1.47]$$

10. Er zijn drie soorten oplossingen: één voor zwakke, één voor kritische en één voor sterke demping.

11. Alleen voor zwakke demping heeft de oplossing een oscillerend karakter:

$$x(t) = e^{-\gamma t}A\cos(\omega_1 t - \beta) \qquad [1.41]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad [1.38]$$

12. Voor kritische demping ($\gamma = \omega_0$) sterft een uitwijking relatief snel uit.