

Elektromagnetisme

Doel:

- "Tour d`horizon" elektromagnetisme:
 - Elektrische krachten, velden, (statisch) } 4.5 EC
 - Magnetische krachten, velden, (statisch) }
 - Unificatie elektriciteit & magnetisme + Golven } Electrodynamica &
⇒ *Maxwell vergelijkingen* ⊃ Licht } Licht 3.0 EC

Vorm:

- Interactief Hoorcollege, demonstraties, werkcollege & practicum

Docenten 1b:

- "Interactief Hoorcollege": Auke-Pieter Colijn & Marcel Vreeswijk
- "Werkcollege": Gordon Lim & Zdenko van Kesteren
- Digitale Opgaves in BlackBoard: Wolter Kaper & Jeroen Luigjes
- Experimenten: Paul Vlaanderen

Blackboard:

- Let op: Inschrijven bij onderwijsburo verplicht.
- Meer informatie op blackboard: www.science.uva.nl of webpage www.nikhef.nl/user/h73/knem.html

Elektromagnetisme

Opgaves:

- Papieren opgaves maken tijdens werkcollege.
- Question Marks= digitale huiswerk-opgaves. Verplicht + tellen mee voor eindcijfer. Wekelijks inleveren, zie blackboard.
- Oefen-Tentamen opgaves. Deze tellen ook mee voor eindcijfer. Worden nog uitgedeeld en inleverdata worden nog afgesproken. 2 voor Electrostatica, 2 voor Magnetostatica.
- 'Animatie van de Week' . Zelf animatie over college-onderwerp voordragen.
- (college "Electrodynamica & Licht" heeft zelfde opzet)

Tentamens (zie rooster):

- Tentamen Electromagnetisme (electrostatica+magnetostatica)
- (college "Electrodynamica & Licht wordt niet schriftelijk getentamineerd)

Beoordeling:

- Practicum (gewicht 20%): 1 verslag (*Millikan*) en labjournaals
- Theorie (gewicht 80%): Cijfer = $0.6 T + 0.1 (Q) + 0.1 (O_{elec}) + 0.1 (O_{mag})$
 - "Q": Question Mark opgaves (wekelijks)
 - "O_elec": Oefen-Tentamen opgave 2 x electrostatica
 - "O_mag": Oefen-Tentamen opgave 2 x magnetostatica
 - "T": Tentamen – cijfer minstens 5.00, anders sowieso onvoldoende.

Literatuur/Informatie

Aanbevolen boek:

“Introduction to Electrodynamics”

David J. Griffiths

College Info:

<http://www.nikhef.nl/user/h73>

Leuke animaties:

http://www.colorado.edu/physics/2000/waves_particles/wavpart2.html

Goede cursussen:

<http://academic.mu.edu/phys/matthysd/web004/lectures.htm>

<http://www.sciencejoywagon.com/physicszone/lesson/07elecst/>

<http://www.sciencejoywagon.com/physicszone/lesson/08magnet/default.htm>

Hoe dingen werken (bliksem, microwave):

<http://www.howstuffworks.com>

Het Boek:

"Introduction to Electrodynamics"

David J. Griffiths

Te gebruiken bij ("good value for money!"):

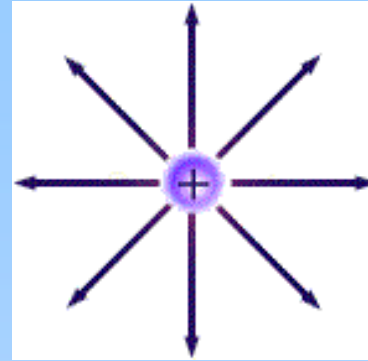
- 1^e jaars college "Klassieke Natuurkunde IC" (dit college)
- 3^e jaars college "Elektrodynamica & Relativiteitstheorie 1"
- 3^e jaars college "Elektrodynamica & Relativiteitstheorie 2"

Hoofdstukken uit Griffith voor deze inleidende & oriënterende cursus:

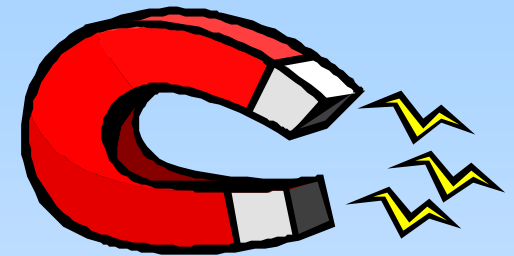
- # 1 Vector Analysis: vektor, gradiënt, divergentie, rotatie & integralen
- # 2 Electrostatics: grotendeels
- # 4 Electric Fields in Matter: grotendeels
- # 5 Magnetostatics: grotendeels m.u.v. de vektor potentiaal
- # 6 Magnetic Fields in Matter: grotendeels
- # 7 Electrodynamics: grotendeels
- # 9 Electromagnetic Waves: alleen het bestaan van e.m. golven

Uiteraard gaat Griffiths iets dieper in de materie dan wij van jullie verwachten in het eerste jaar. De moeilijkere voorbeelden en opgaven in Griffiths moet je gewoon overslaan. Als je de werkcollege opgaven beheerst dan zit je riant voor het tentamen.

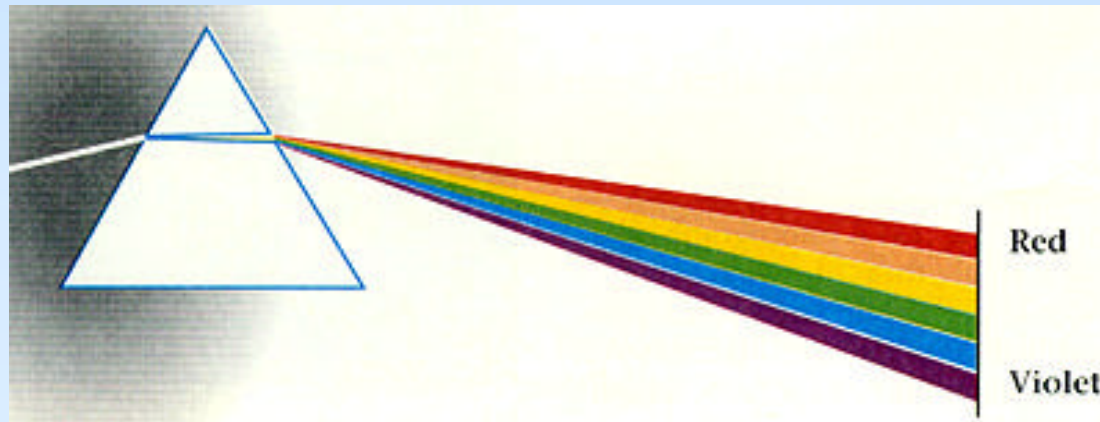
→ **Elektrostatica**



Magnetostatica



Elektromagnetisme \mathcal{P} Licht



Inhoud

Elektrostatica

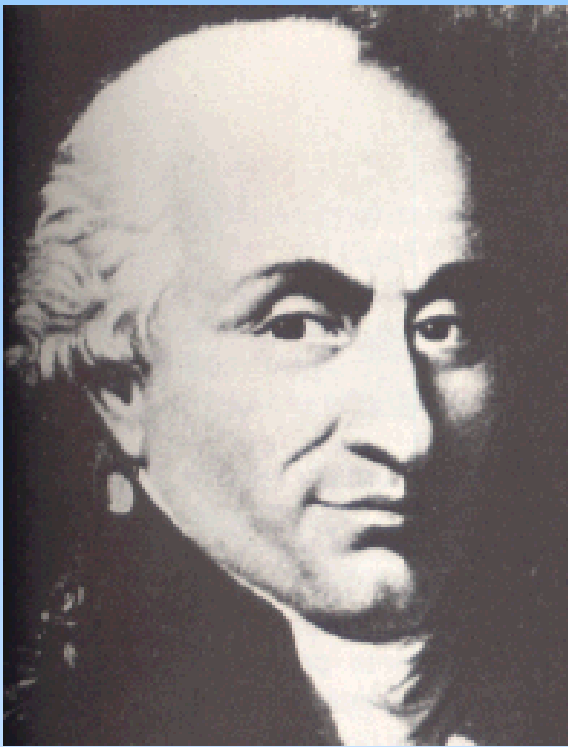
- 1. **Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht**
2. **Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld**
3. **Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal**
4. **Electrische Potentialaal & Energie**
5. **Elektrische velden in materie: Geleiders**
6. **Elektrische velden in materie: Isolatoren**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = r / e_0$$

$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

- Vektor: §1.1 m.u.v. §1.1.3 en §1.1.5
- Wet van Coulomb: §2.1



Wet van Coulomb

De elektrische lading

De elektrische kracht

De elektrische veldsterkte

Voorbeelden

DEMO: fenomeen elektriciteit



ELEKTROSCOOP

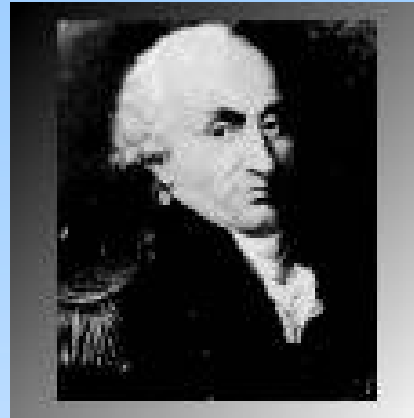
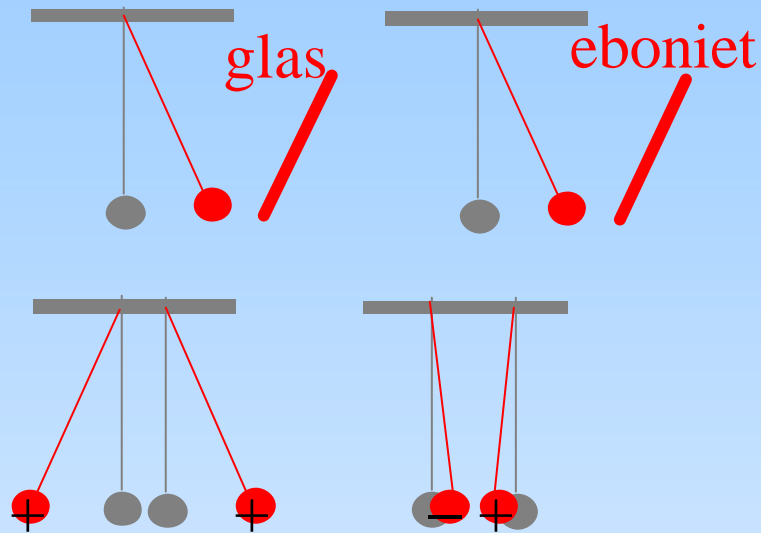
Een elektroscop wordt opgeladen.
De wijzerstand is een maat voor
het spanningsverschil tussen het
centrale deel (met knop en wijzer) en
de wand. De elektroscop wordt
ontladen door hem aan te raken.

Elektrostatica: experiment

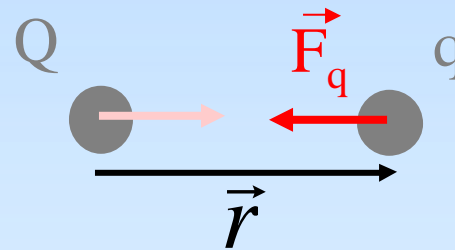
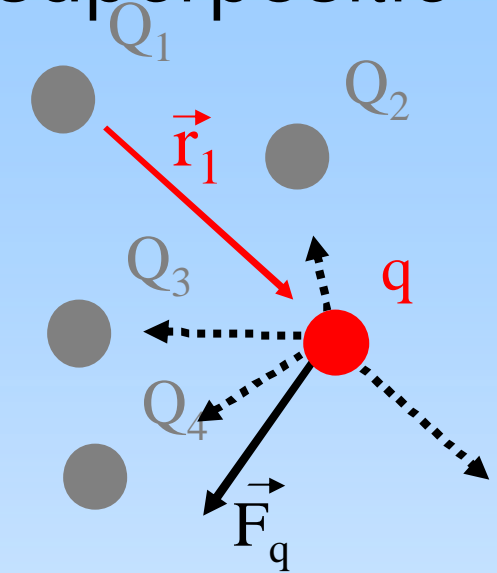
+/- lading

krachtwet

superpositie



1777: C. de Coulomb



$$\vec{F}_q \propto \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}_q \propto \frac{qQ_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{qQ_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots$$

$$= q \left\{ \frac{Q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{Q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right\}$$

$$\equiv q\vec{E}$$

nieuwe kracht:

$F_{\text{elektrisch}}$

positief: + & negatief: -

+ + & - -: afstotend

+ - & - +: aantrekkend

quantisatie: q_{elektron}

ladingsbehoud: $\Sigma q = \text{constant}$

Wet van Coulomb \Rightarrow kracht & veld

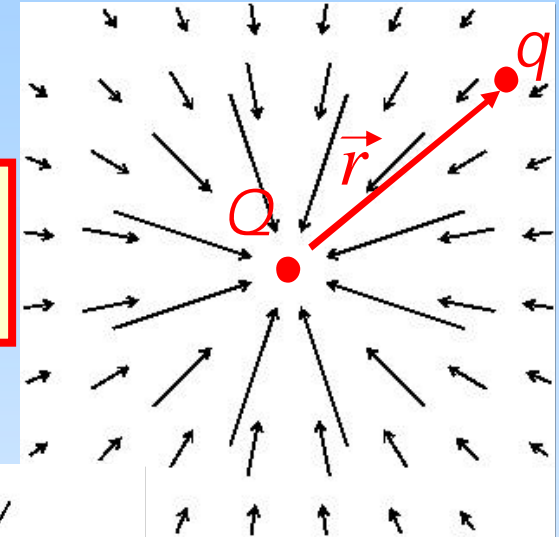
$$\vec{F}_q \equiv K_e \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \equiv 10^{-7} c^2 \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \equiv \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{r}$$

Eenheden:

- Lengte [l]: meter m
- Tijd [t]: seconde s
- Massa [m]: kilogram kg
- Lading [q]: Coulomb C

Kracht:

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$



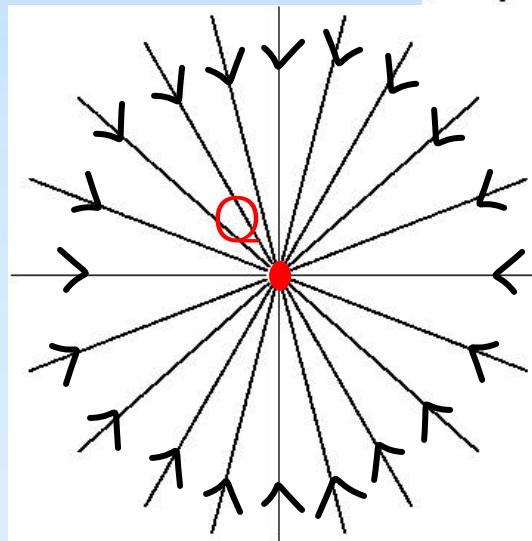
Constanten:

- eenheidslading:

$$q_{\text{elektron}} \approx -1.60 * 10^{-19} \text{ C}$$

- permittiviteit:

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi * 10^{-7} c^2} \approx 8.85 * 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$



Veld:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_q}{q}$$

DEMO: elektrische veldlijnen

Puntlading



ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (puntlading)

Een puntvormige (cirkelvormige) geleider wordt in een bad met olie en griesmeel gehangen.
De geleider krijgt een positieve lading.
De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.



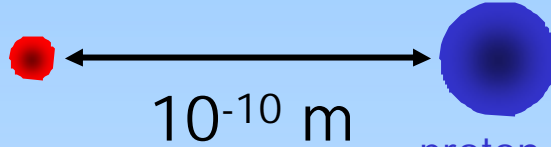
ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (puntlading)

Een puntvormige (cirkelvormige) geleider wordt in een bad met olie en griesmeel gehangen. De geleider krijgt een negatieve lading. De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.

$F_{\text{Elektrisch}} \leftrightarrow F_{\text{Gravitatie}}$

$$|\vec{F}_E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$
$$\approx 2.3 * 10^{-8} N$$

elektron
 $m=9.1*10^{-31}$ kg
 $q=-1.6*10^{-19}$ C



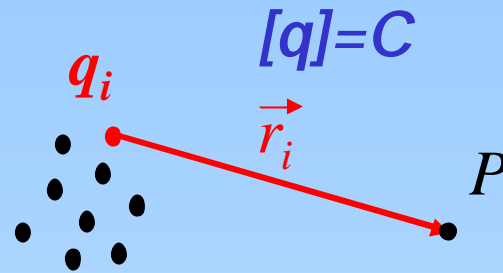
proton
 $m=1.7*10^{-27}$ kg
 $q=+1.6*10^{-19}$ C

$$|\vec{F}_G| = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$
$$\approx 1.0 * 10^{-47} N$$
$$\left(G=6.673*10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \right)$$

Waarom is in het dagelijks leven toch de zwaartekracht juist zo voelbaar?

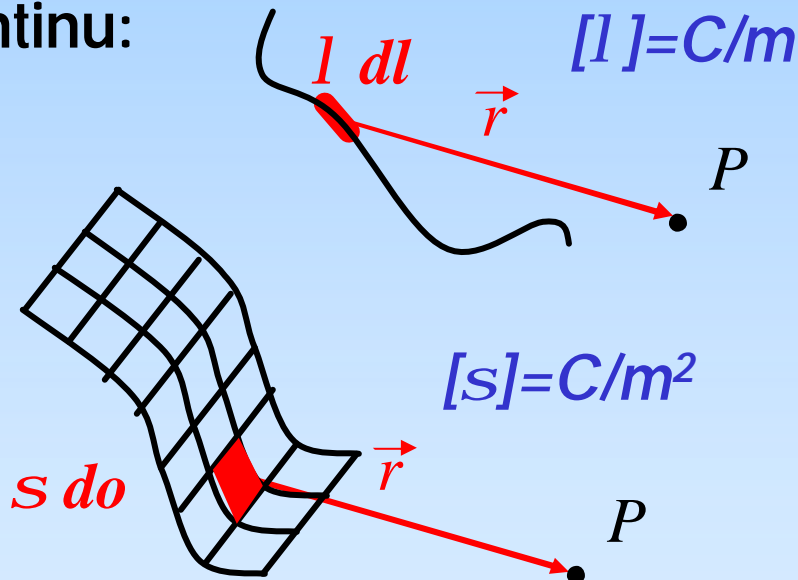
Ladingsverdeling \Rightarrow E-veld

Diskreet:



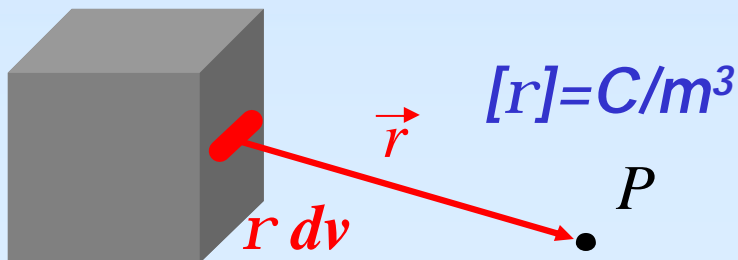
$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Continu:



$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{lijn}} dl \frac{l}{r^2} \hat{r}$$

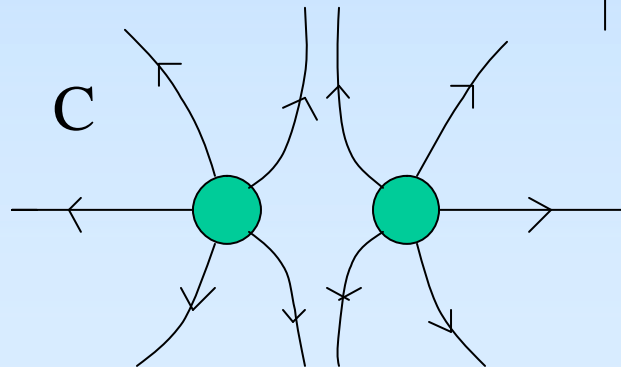
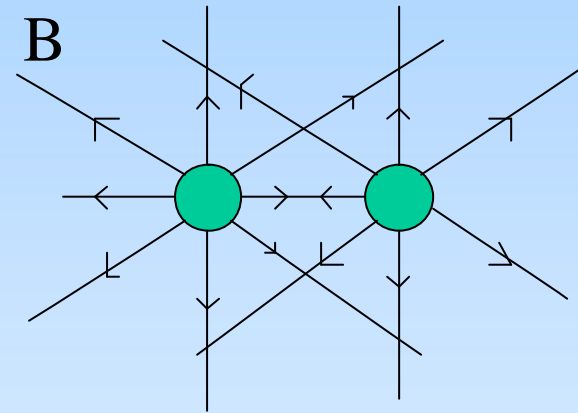
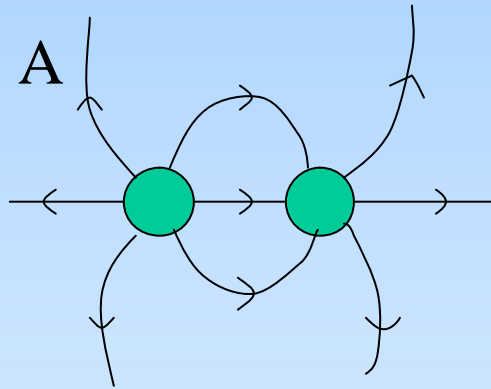
$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{oppervlak}} do \frac{s}{r^2} \hat{r}$$



$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume}} dv \frac{r}{r^2} \hat{r}$$

Discussievraag 1

Welk veldlijnenpatroon hoort bij twee gelijke positieve ladingen?



DEMO: elektrische veldlijnen

Twee Puntladingen

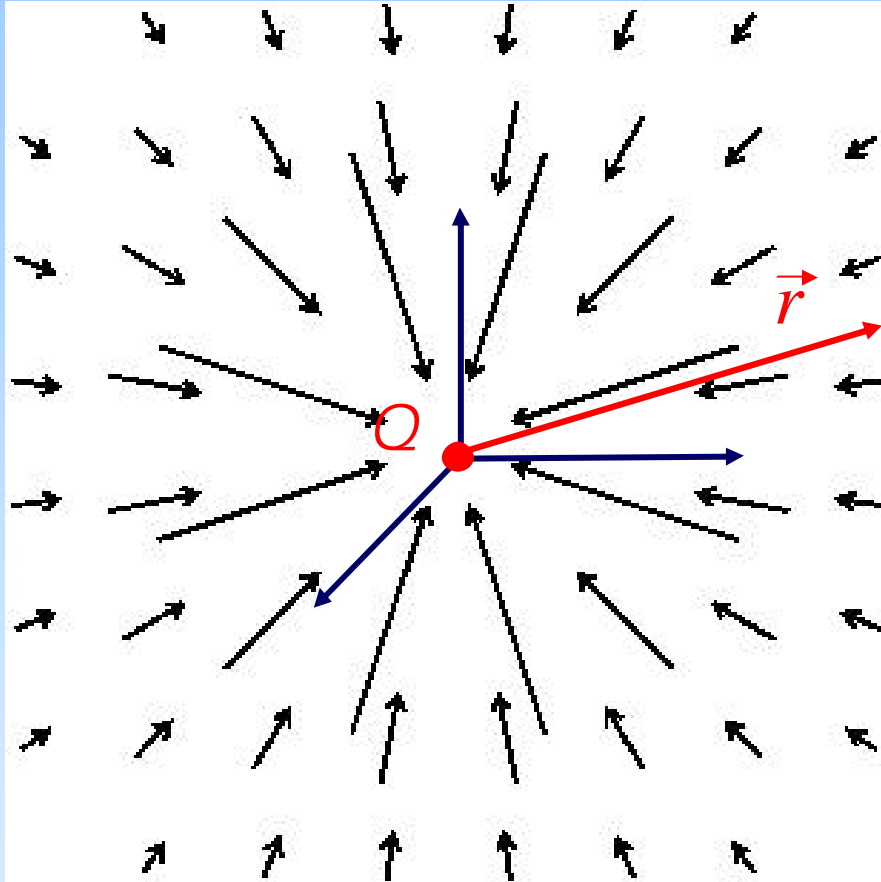


ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (twee puntladingen)

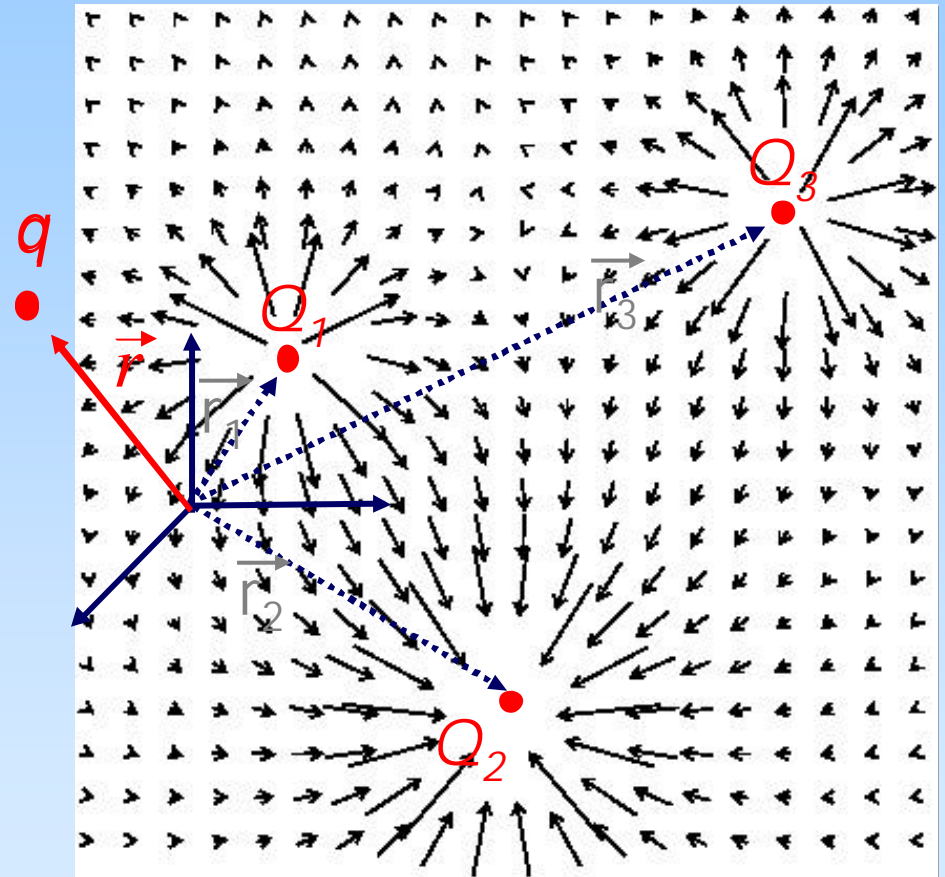
Twee puntvormige (cirkelvormige) geleiders worden in een bad met olie en griesmeel gehangen. Beide geleiders krijgen dezelfde negatieve lading. De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.

V.b. E-veld puntladingen

Lading Q in oorsprong



Drie ladingen: Q_1 , Q_2 en Q_3



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} Q_1 + \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} Q_2 + \frac{\vec{r}-\vec{r}_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|^3} Q_3 \right\}$$

V.b. E-veld dipool

Ladingen $+q$ en $-q$ op afstand $2d$:

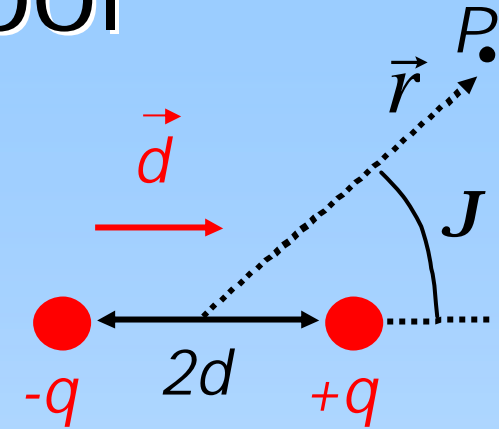
Veld langs lijn $\vartheta=0^\circ$

$$|\vec{E}_P(r, \mathbf{J}=0^\circ)| \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(r-d)^2} - \frac{1}{(r+d)^2} \right\}$$

Taylor

r >> d

$$\approx \frac{4qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \equiv \frac{2|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{|\vec{p}|}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

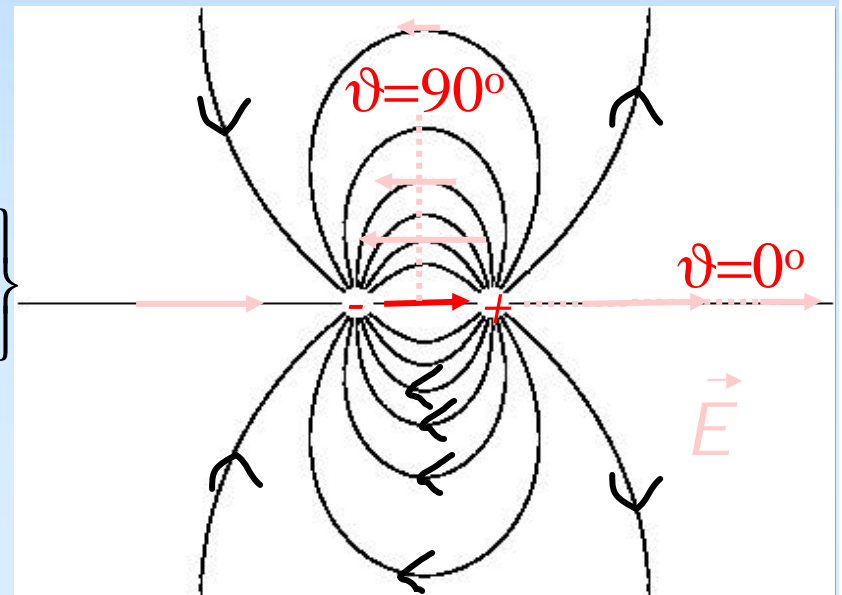


Dipoolmoment: $\vec{p} = q2\vec{d}$
 (Ideale of Mathematische dipool heeft geen afmetingen: $d \rightarrow 0$ en $q \rightarrow \infty$ en \vec{p} eindig)

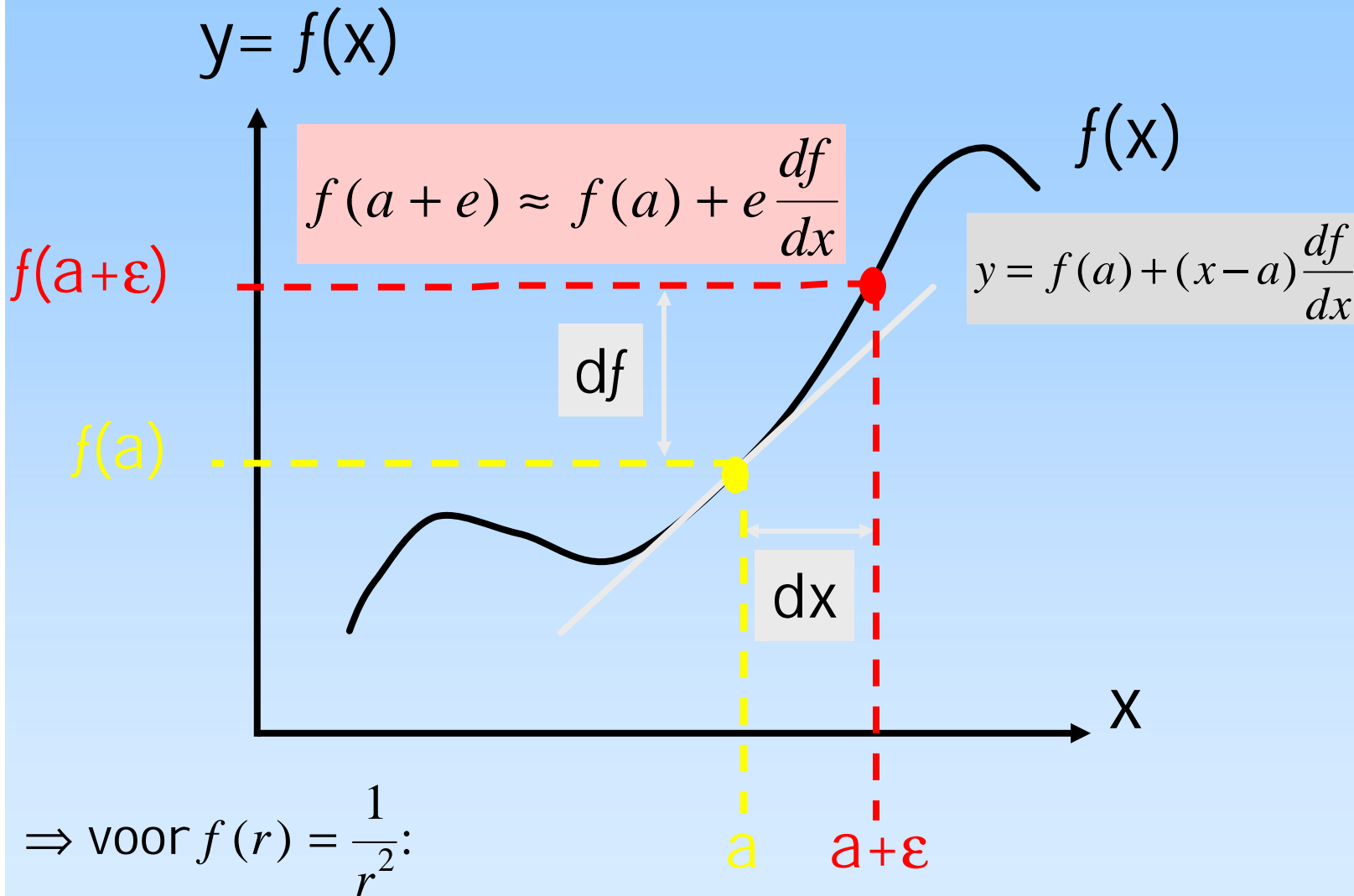
Veld langs lijn $\vartheta=90^\circ$

$$|\vec{E}_P(r, \mathbf{J}=90^\circ)| \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2+d^2)} \left\{ \frac{+d}{\sqrt{d^2+r^2}} - \frac{-d}{\sqrt{d^2+r^2}} \right\}$$

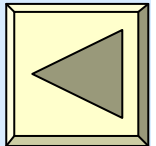
$$\approx \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \equiv \frac{|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



Taylor expansie



$$\frac{1}{(r+d)^2} \approx \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} (+d) = \frac{1}{r^2} - \frac{2d}{r^3} \text{ en } \frac{1}{(r-d)^2} \approx \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} (-d) = \frac{1}{r^2} + \frac{2d}{r^3}$$



DEMO: elektrische veldlijnen

Dipool



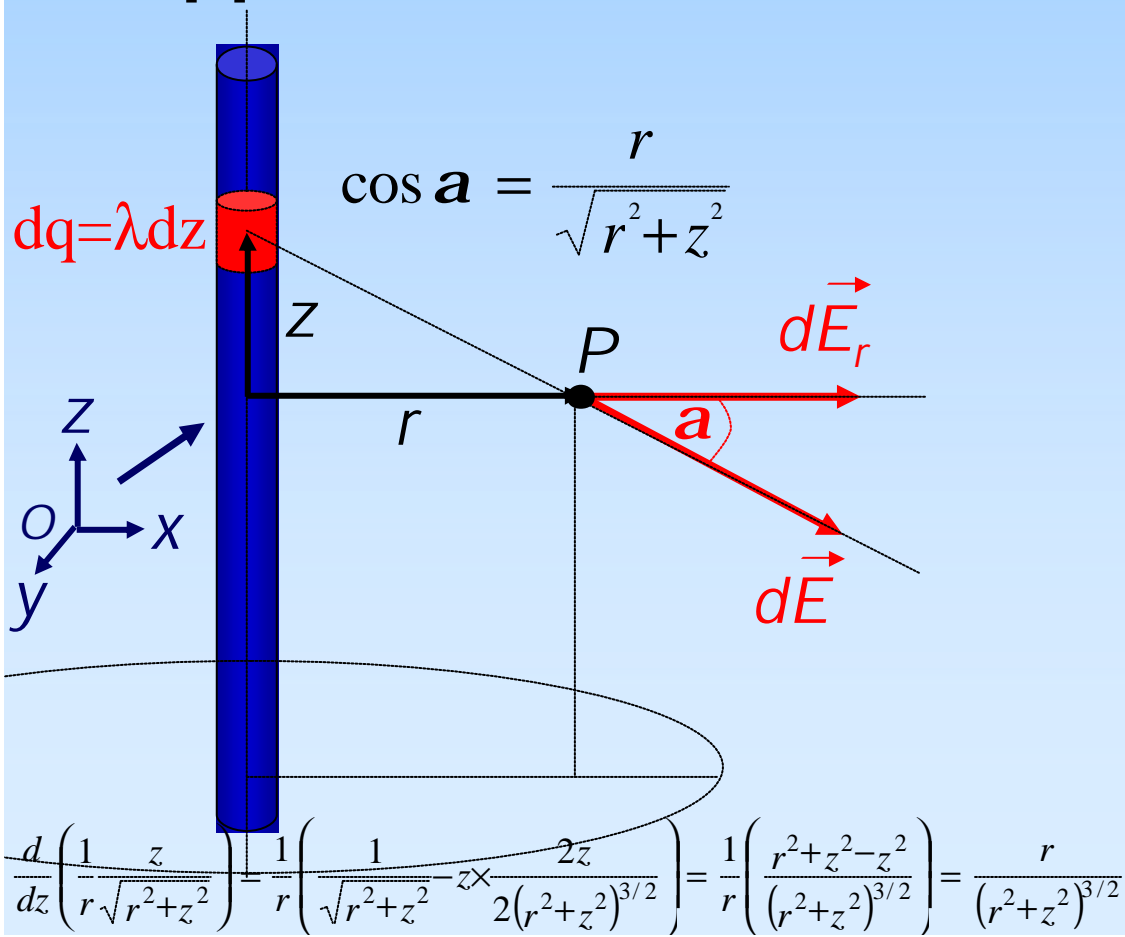
ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (dipool)

Twée puntvormige (cirkelvormige) geleiders worden in een bad met olie en griesmeel gehangen. De geleiders krijgen een tegengestelde lading. De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.

V.b. E-veld ∞ lange draad

Lijnlading:

- homogeen geladen draad
- ladingdichtheid $dq = \lambda dz$
- $[\lambda] = C/m$



Berekening E-veld:

- nadenken:
cilinder symmetrie: $(r\phi z)$
- rekenen:

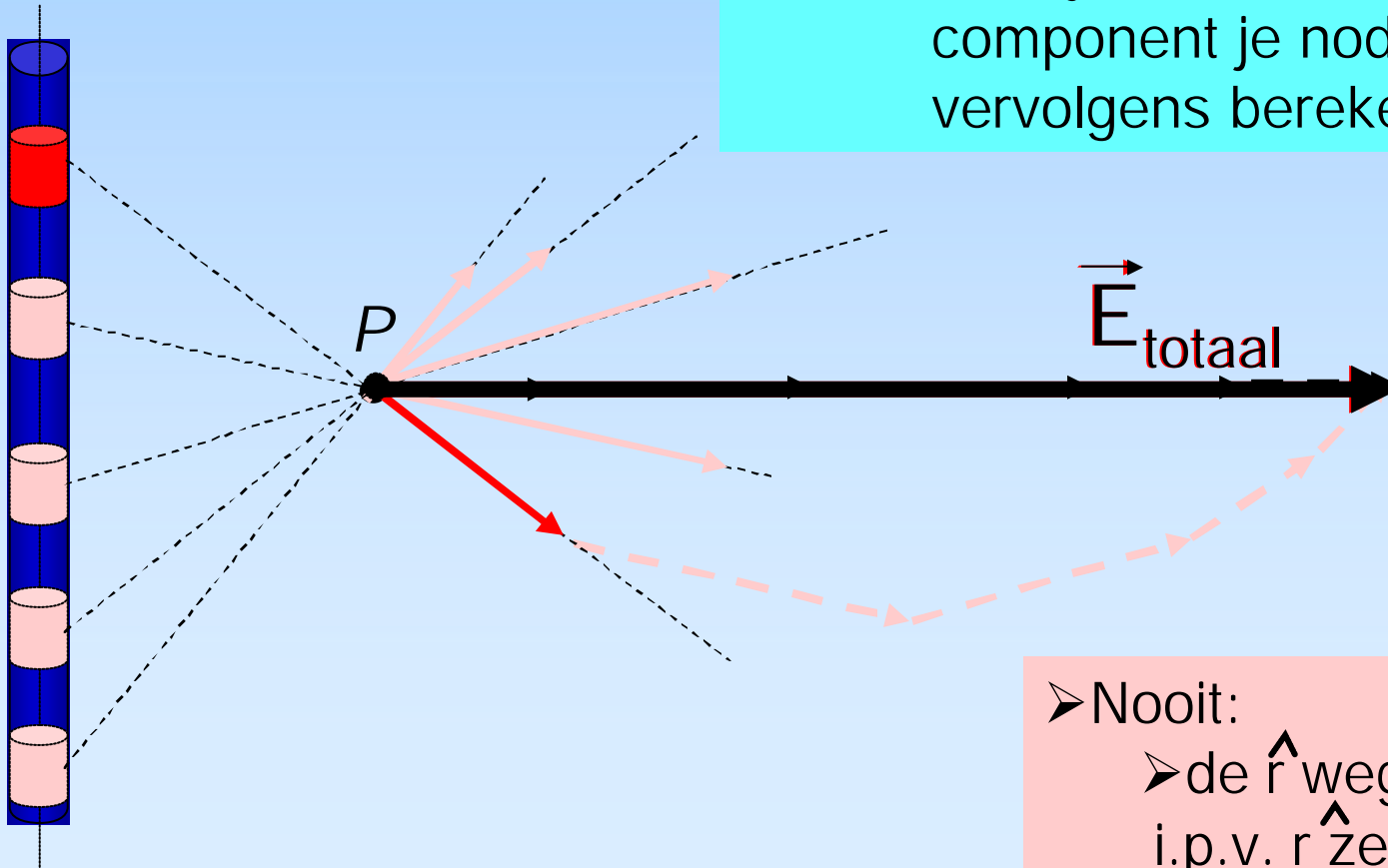
$$\begin{aligned}
 |\vec{E}_P| &= \left| \int_{\text{lijn}} d\vec{E}_r \right| \vec{E} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi \epsilon_0 [r^2 + z^2] \sqrt{r^2 + z^2}} \cos a \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\
 &= \frac{2\lambda}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

Getallen \leftrightarrow vectoren

$$\vec{E}_P \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{lijn}} dl \frac{\mathbf{l}}{r^2} \hat{r}$$

➤ Let op:

- Integrand is een vector, d.w.z.
 - Of: je berekent E_x , E_y en E_z (werk: 3 integralen i.p.v. 1)
 - Of: je beredeneert welke component je nodig hebt en vervolgens bereken je die!



➤ Nooit:

- de \hat{r} weglaten d.w.z. i.p.v. r zelf $|r| = 1$ lezen!

DEMO: elektrische veldlijnen

Lijnlading



ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (lijn­lading)

Een lijnvormige geleider wordt in een bad met olie en griesmeel gehangen.

De geleider krijgt een negatieve lading.

De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.

Het veld is het grootst waar de veldlijnen het dichtst op elkaar liggen.

DEMO:

Twee Lijnladingen



ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (twee lijnvormige ladingen)

Twee lijnvormige geleiders worden in een bad met olie en griesmeel gehangen. Beide geleiders krijgen dezelfde negatieve lading. De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon. Het veld is het grootst waar de veldlijnen het dichtst op elkaar liggen.



ELEKTRISCHE VELDLIJNEN (model plaatcondensator)

Twee lijnvormige geleiders worden in een bad met olie en griesmeel gehangen. De geleiders krijgen een tegengestelde lading. De griesmeelkorrels vormen het veldlijnenpatroon.

I: Wat heb ik geleerd?

Lading + of -

$$q_{\text{elektron}} \gg -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \text{ en } \dot{a}q = \text{constant}$$

Kracht en \vec{E} -Veld
(Coulomb)

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \text{ en } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Veld uit $\rho(\vec{r})$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \rho(\vec{r}') \frac{\hat{r}}{r^2} dV$$

Configuraties:

- ❖ puntladingen
- ❖ dipool
- ❖ lijnlading

EXTRA: Vectoren in formules

Definities

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \text{ zijn eenheidsvectoren in } x, y, z \text{ richting})$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \times \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{de grootte of lengte van vector } \vec{r})$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (\text{vector met lengte 1})$$

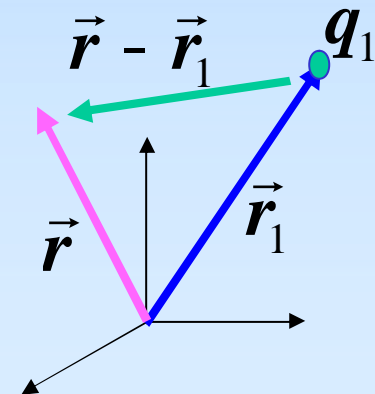
Voorbeeld

Wat is het \vec{E} veld op positie \vec{r} tengevolge van
een puntlading q_1 op positie \vec{r}_1 ?
(zowel \vec{r} als \vec{r}_1 zijn gedefinieerd t.o.v. oorsprong)

Niet: $\vec{E} \propto \frac{q_1}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$

Wel: $\vec{E} \propto \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$

Dus : eerst goed nadenken welke vector je moet gebruiken!



EXTRA DEMO: Verklaring correct?



ELEKTROSTATISCHE VOORTSTUWING

Een molentje met spitse uiteinden wordt opgeladen. Door de hoge veldsterkte aan de spitsen wordt lading aan de omgevende lucht afgegeven.

Door elektrostatische afstoting wordt het molentje in beweging gebracht.

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
- 2. **Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld**
3. Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal
4. Elektrische Potentialaal & Energie
5. Elektrische velden in materie: Geleiders
6. Elektrische velden in materie: Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathbf{r} / e_0$$
$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

- Coördinaten definitie en volume elementje BOL §1.4.1 en Cilinder §1.4.2
- Integreren: §1.3.1 (inleiding)
- Wet van Gauss: §2.2 m.u.v. §2.2.2 (komt pas in college # 4)

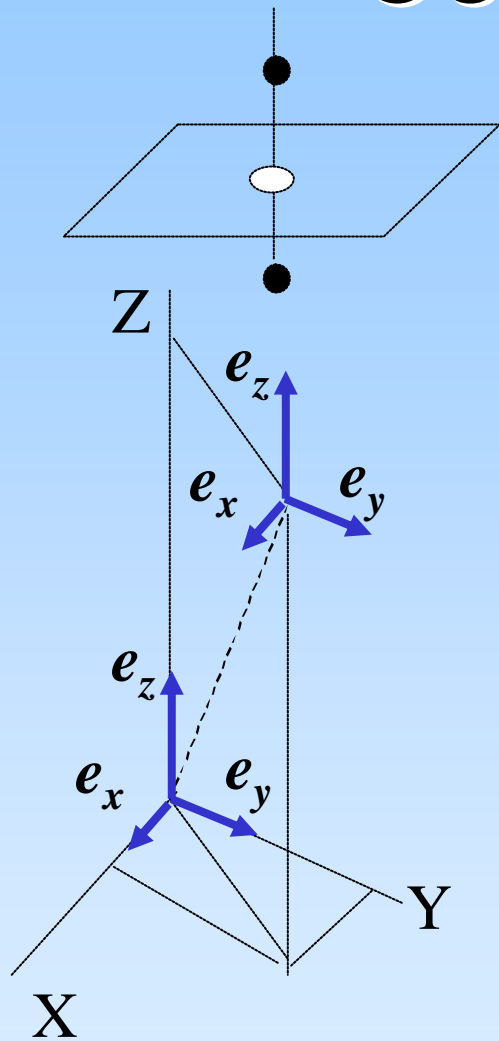
Volume integralen

Coördinaat systemen

Cilinder coördinaten

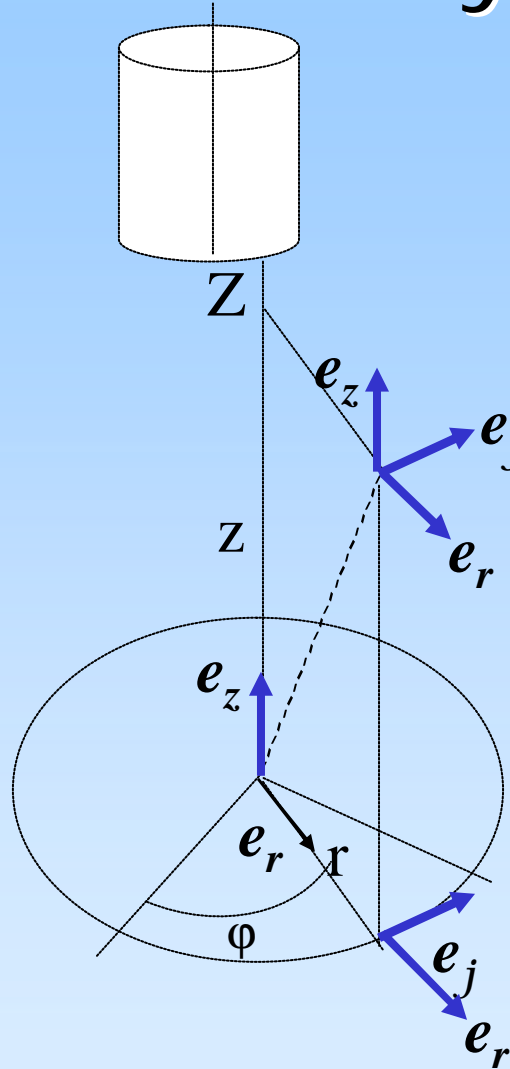
Bol coördinaten

Coördinaat systemen



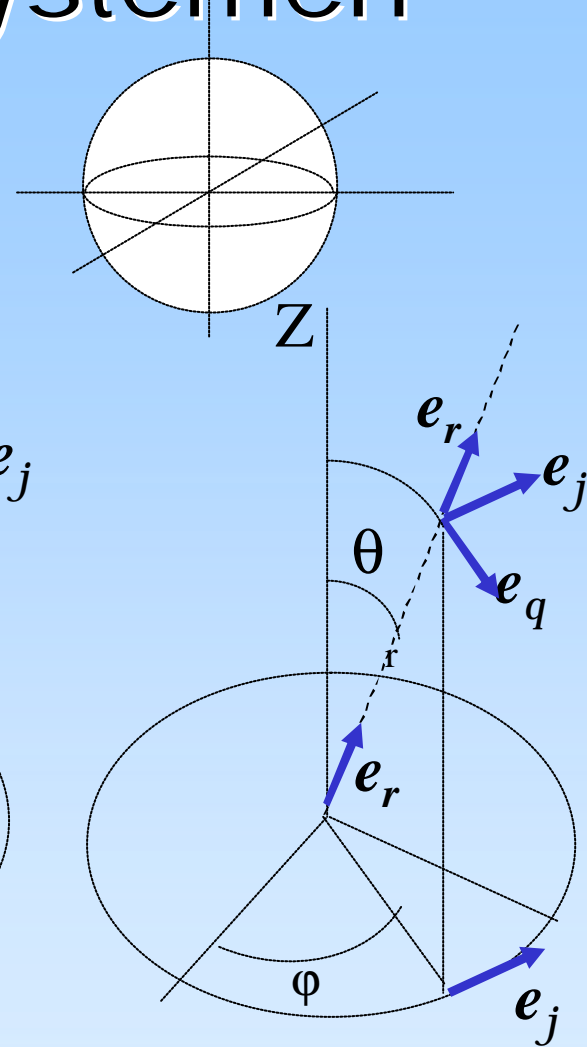
(x, y, z)

cartetisch



(r, φ, z)

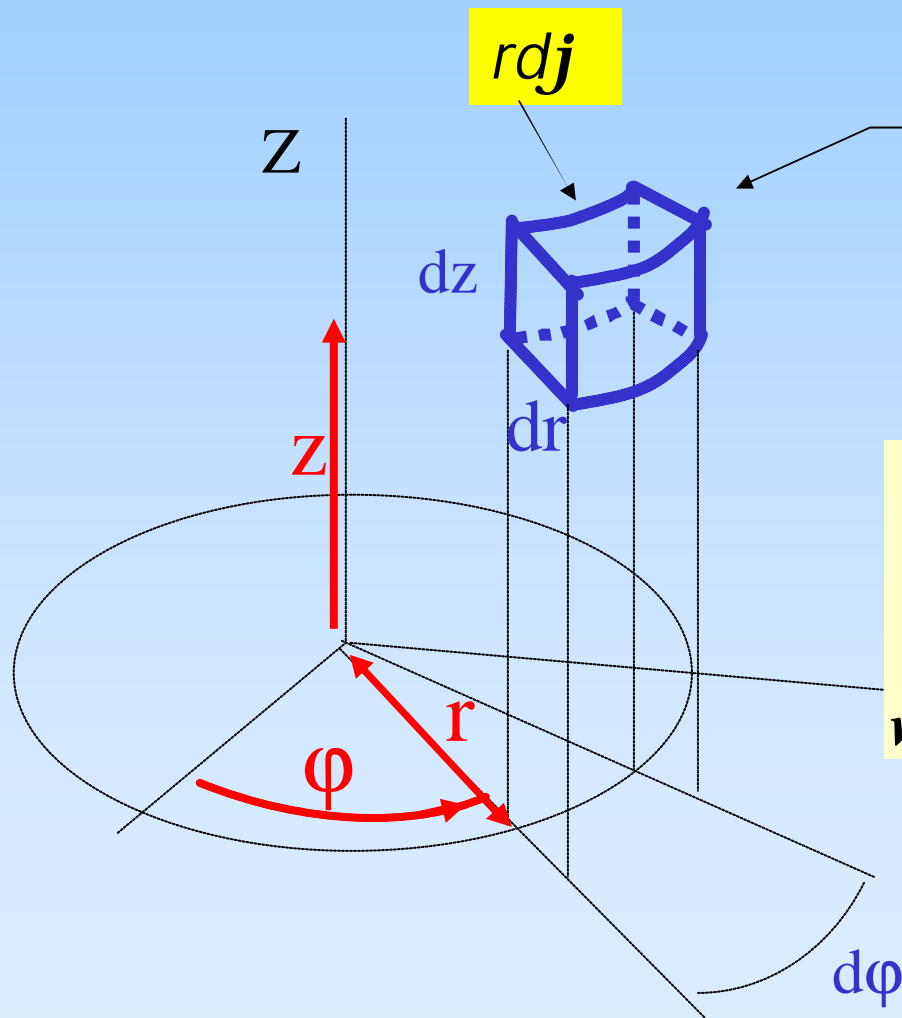
cilinder



(r, θ, φ)

bol

Volume integraal: cilinder coördinaten

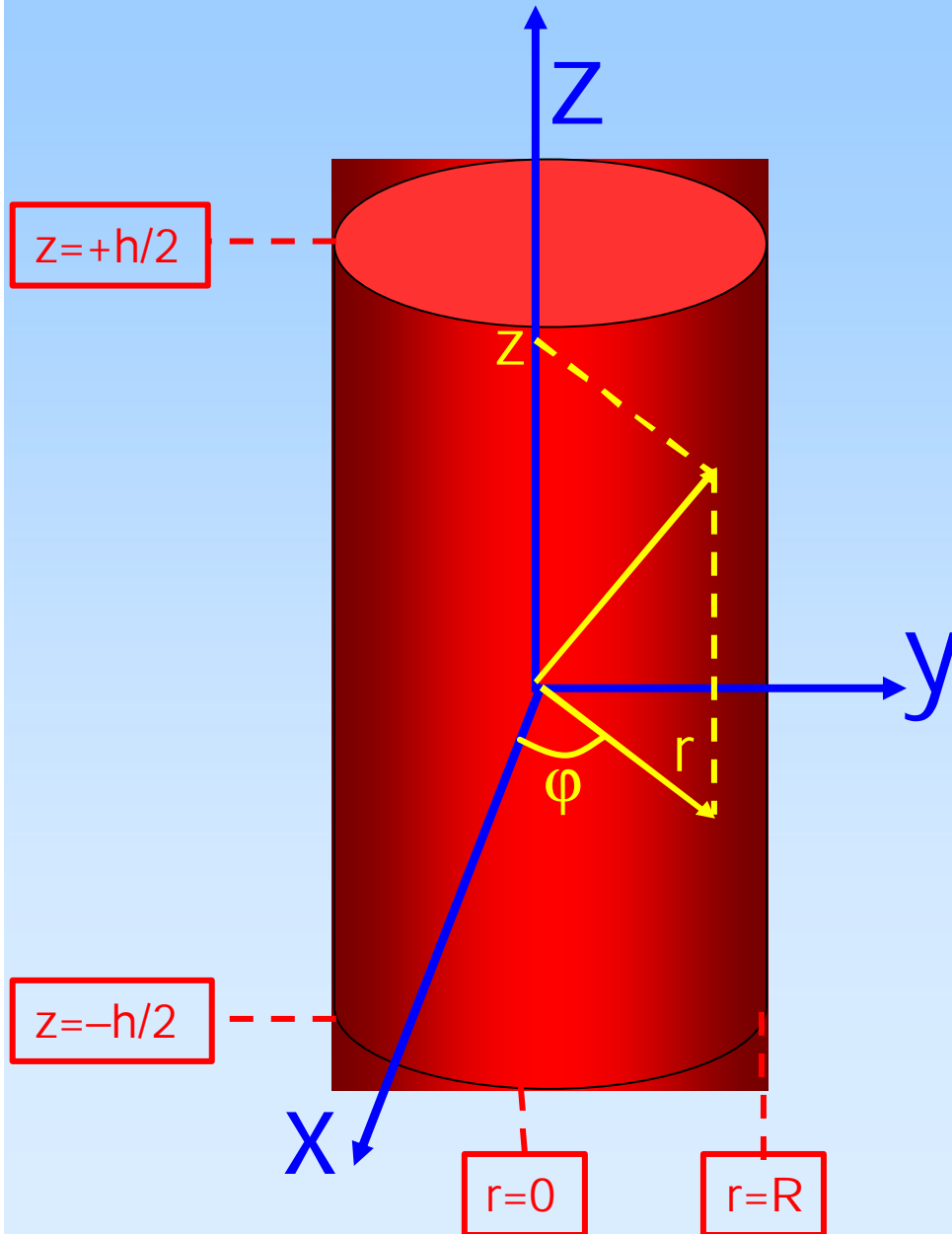


$$dv = (dz) (r d\phi) dr \\ = r dz dr d\phi$$

Integreren functie in
cilindercoördinaten:

$$\int_{\text{volume}} f(r, \phi, z) dv = \int_{\text{domein}} f(r, \phi, z) r dr d\phi dz$$

Voorbeeld: cilinder inhoud



Om de cilinder inhoud te bepalen integreer je de functie "1" over het cilinder volume:

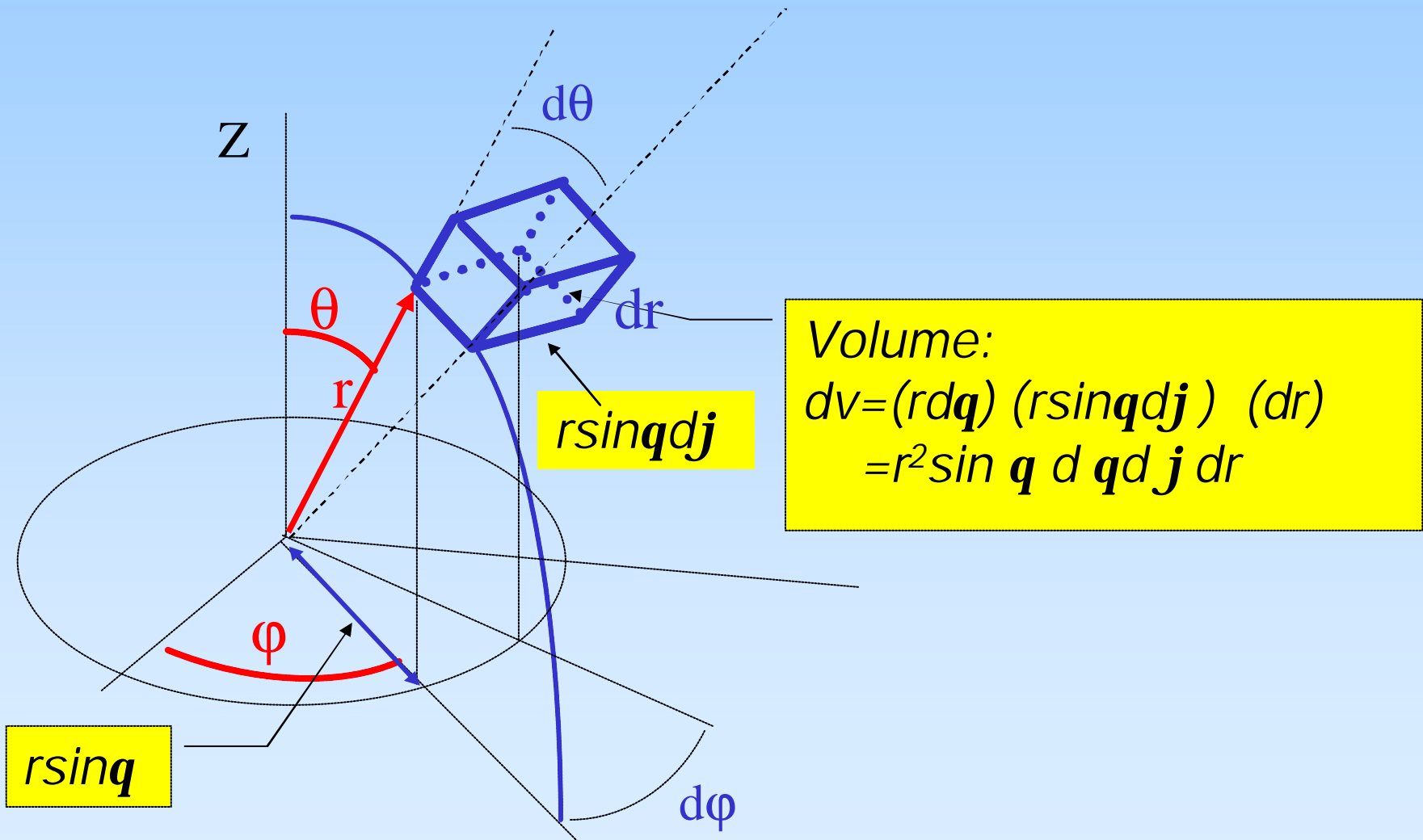
Integratie domein:

$$\begin{array}{ll} z: & [-h/2, +h/2] \\ r: & [0, R] \\ \varphi: & [0, 2\pi] \end{array}$$

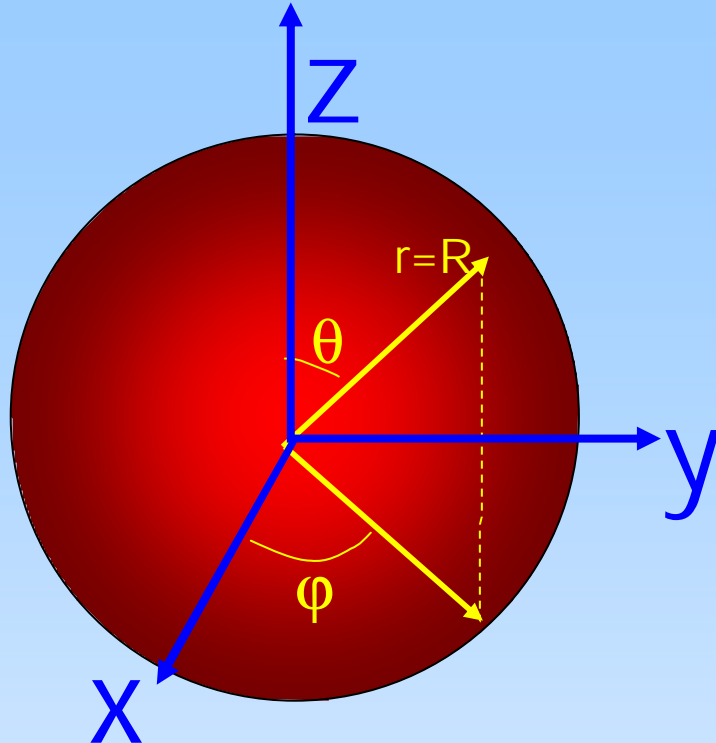
Integraal:

$$\begin{aligned} \int_{\text{cilinder}} 1 dV &\rightarrow \int_{-h/2}^{+h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\mathbf{j} dz \\ &= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{2} r^2 \right|_0^R d\mathbf{j} dz \\ &= \int_{-h/2}^{+h/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\mathbf{j} dz = \mathbf{p} R^2 h \end{aligned}$$

Volume integraal: bol coördinaten



Voorbeelden Integreren in Bolcoördinaten



Om het boloppervlak te bepalen integreer je de functie "1" over het bol oppervlak:

Oppervlak $r=R$

Integratie domein: $\theta:[0,\pi]$ $\varphi:[0,2\pi]$

$$\int_{\text{oppervlak}} 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(-\cos \theta \Big|_0^\pi \right) d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 (-\cos \pi + \cos 0) = 4\pi R^2$$

Bepaal zelf bolvolume:

$$\int_{\text{bol}} 1 \, dV = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Volume integraal bolsymmetrische functie:

$$\int f(r, \theta, \varphi) \, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \int_0^R f(r) 4\pi r^2 \, dr$$

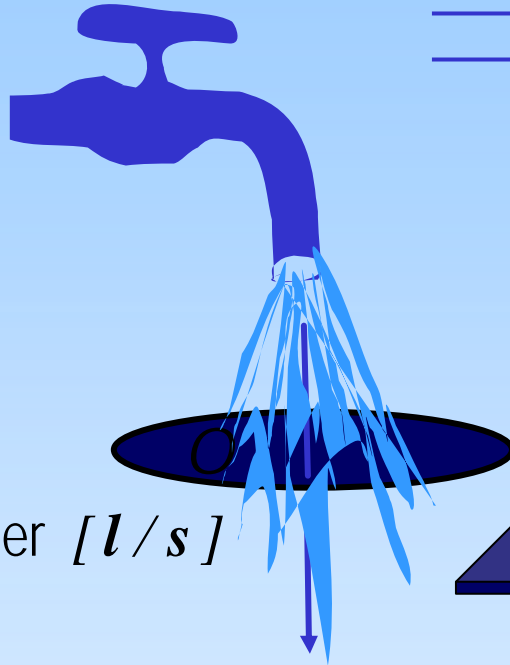
Wet van Gauss



De elektrische flux
De wet van Gauss
Voorbeelden

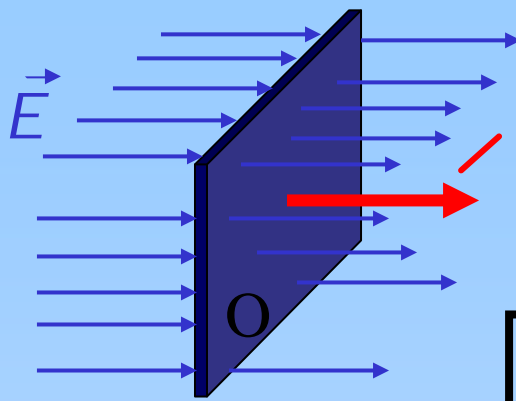
Flux Φ_E

Waterkraan:



"Flux":

$\int_{\text{oppervlak } O} \dot{d}o \text{ water } [l/s]$

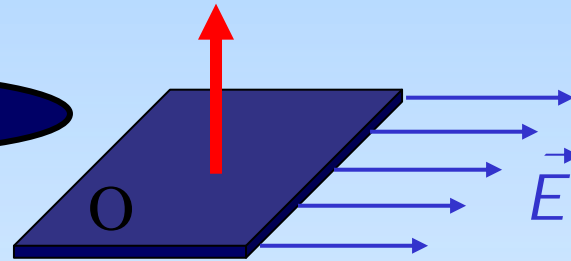


$$d\hat{o} = \hat{e}_n do$$

$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = 0^\circ$$

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{oppervlak } O} d\hat{o} \cdot \vec{E}$$

$$\equiv \int_{\text{oppervlak } O} do \hat{e}_n \cdot \vec{E} = OE$$

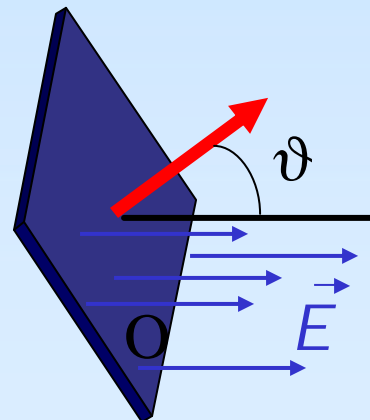


$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = 90^\circ$$

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{oppervlak } O} d\hat{o} \cdot \vec{E} = 0$$

Verband tussen:

- open/dicht van de kraan
- "flux" door oppervlak O

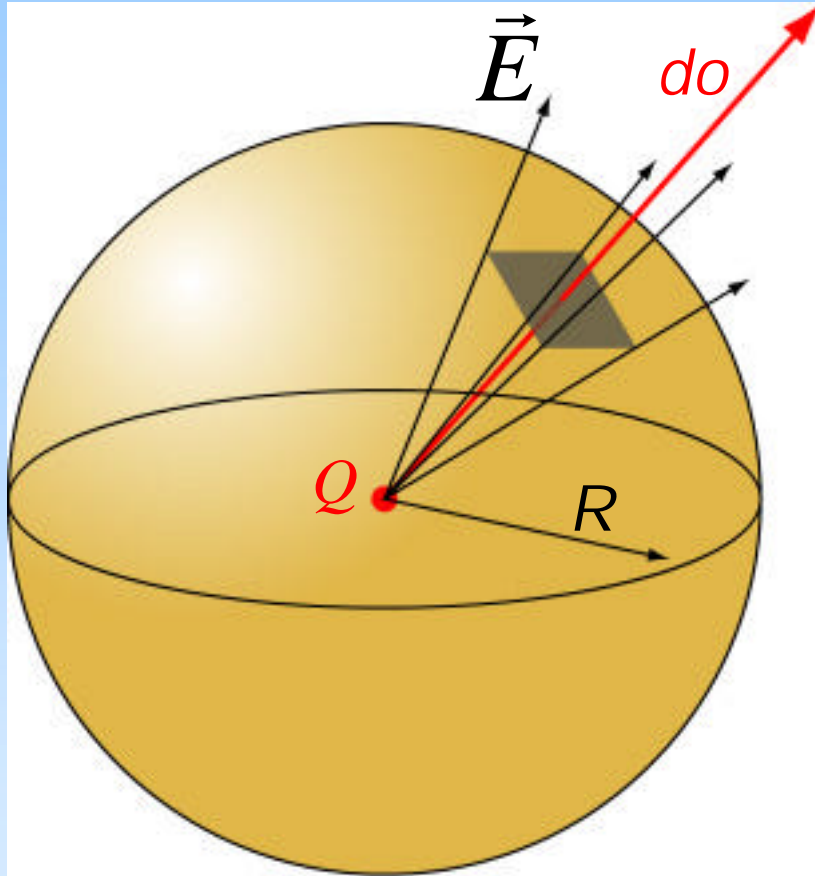


$$\angle(\vec{E}, d\hat{o}) = J$$

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{oppervlak } O} do \hat{e}_n \cdot \vec{E}$$

$$= OE \cos J$$

Gevolg wet van Coulomb



Puntlading Q in middelpunt bol

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Flux Φ_E door (denkbeeldig) boloppervlak wordt:

$$\begin{aligned} \oint_{bol} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{o} &= \oint_{bol} |\vec{E}(R)| \hat{r} \cdot d\vec{o} \quad (\hat{r} // d\vec{o}) \\ &= |\vec{E}(R)| \oint_{bol} do = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_{bol} do \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_{bol} do = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

De essentie:

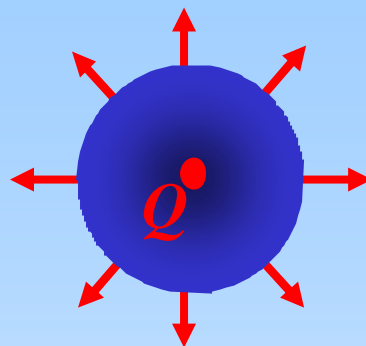
- $E \propto 1/r^2$
- boloppervlak $\propto r^2$

$\Phi_E = Q/\epsilon_0$ geldt voor ieder omsluitend oppervlak;
niet alleen voor bol met Q in middelpunt!

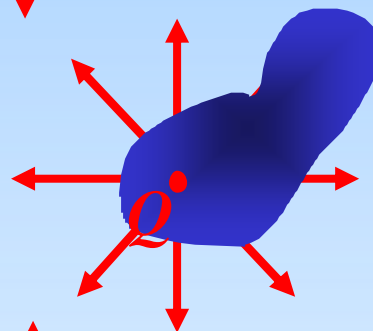
Wet van Gauss:

$$\oint_{\text{oppervlak } O} \vec{E} \times d\vec{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i \text{ omsloten}$$

Lading Q omsloten door een boloppervlak

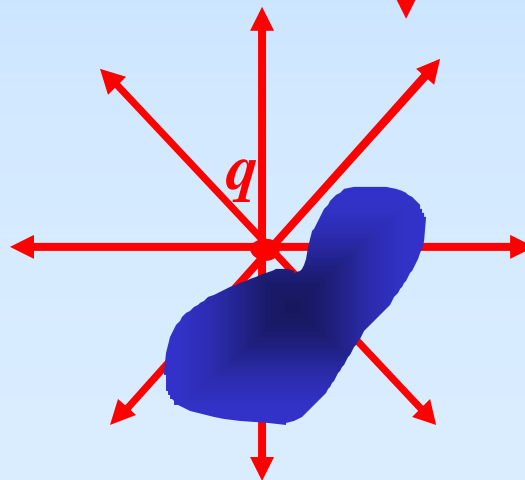


Lading Q omsloten door willekeurig oppervlak



$$\left. \vphantom{\int} \right\} \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Lading q buiten een willekeurig oppervlak

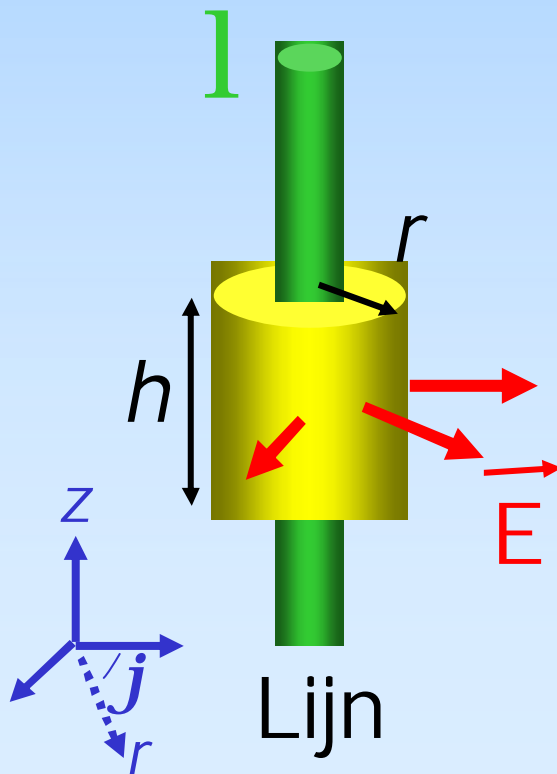
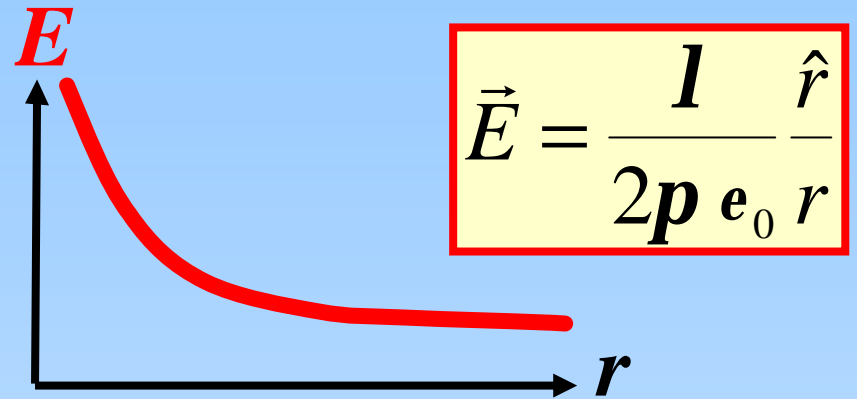


$$\Phi_E = 0$$

V.b. Gauss: dunne draad

Dunne \nexists draad:

- ladingsverdeling: λ C/m
- symmetrie: $E \perp$ draad, $E(r)$
- "Gauss box": cilindertje



Flux:

deksels cilinder : $F_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

wand cilinder : $F_E = 2\pi r h E$

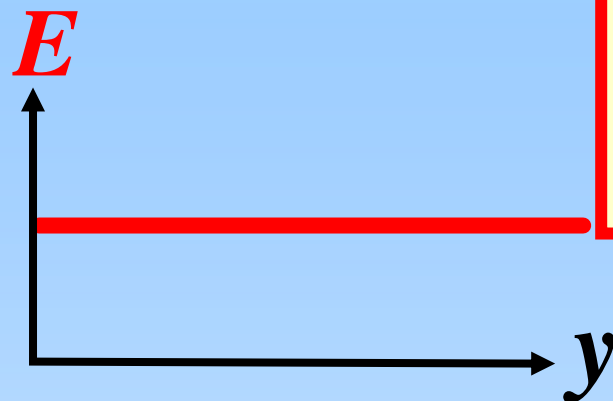
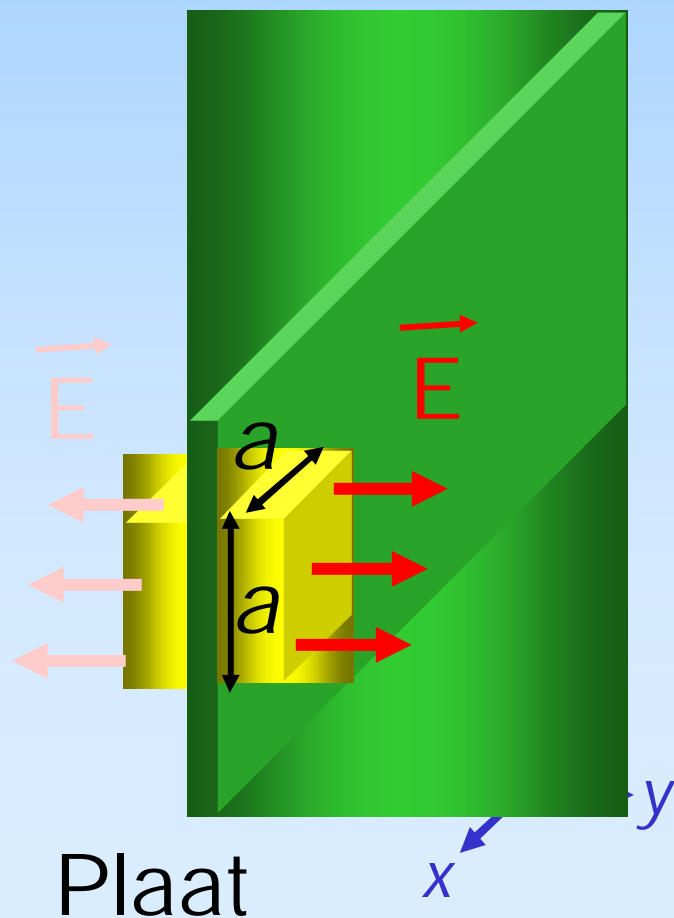
Wet van Gauss:

$$F_E = \frac{1}{\epsilon_0} \overset{\text{omsloten}}{\lambda} Q \cdot 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \hat{U} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

V.b. Gauss: vlakke plaat

Vlakke ∇ plaat:

- ladingsverdeling: $s \text{ C/m}^2$
- symmetrie: $E \perp \text{vlak}, E(y)$
- "Gauss box": kubusje



$$|\vec{E}| = \frac{s}{2\epsilon_0}$$

Flux:

voor/achterkant: $F_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

boven/onderkant: $F_E = 0$ want: $\vec{E} \perp d\vec{o}$

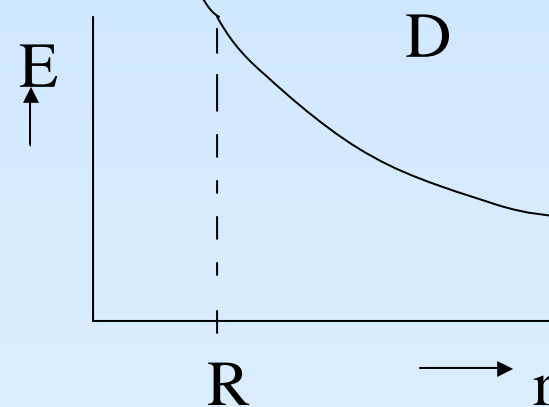
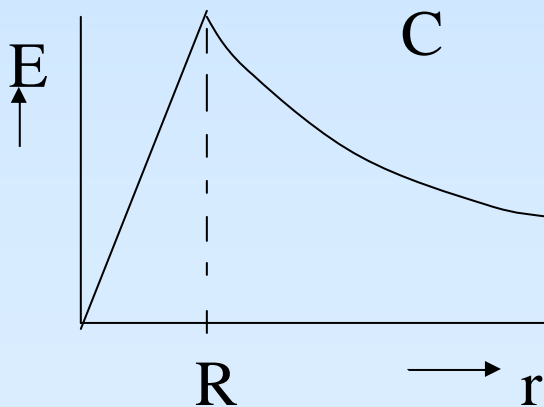
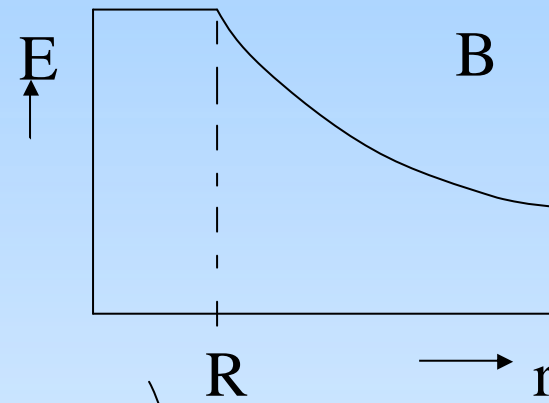
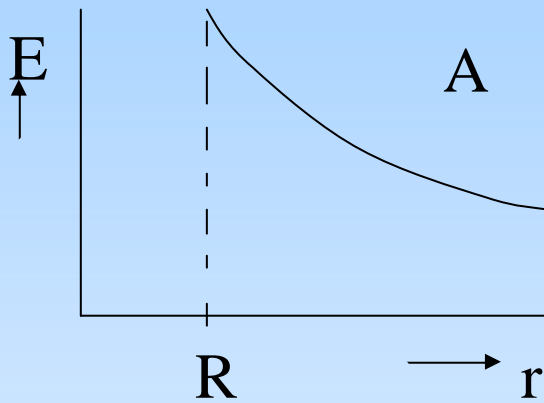
zijanten: $F_E = a^2 E + a^2 E = 2a^2 E$

Wet van Gauss:

$$F_E = \frac{1}{\epsilon_0} \overset{\text{omsloten}}{\Delta Q} = 2a^2 E = \frac{a^2 s}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{s}{2\epsilon_0}$$

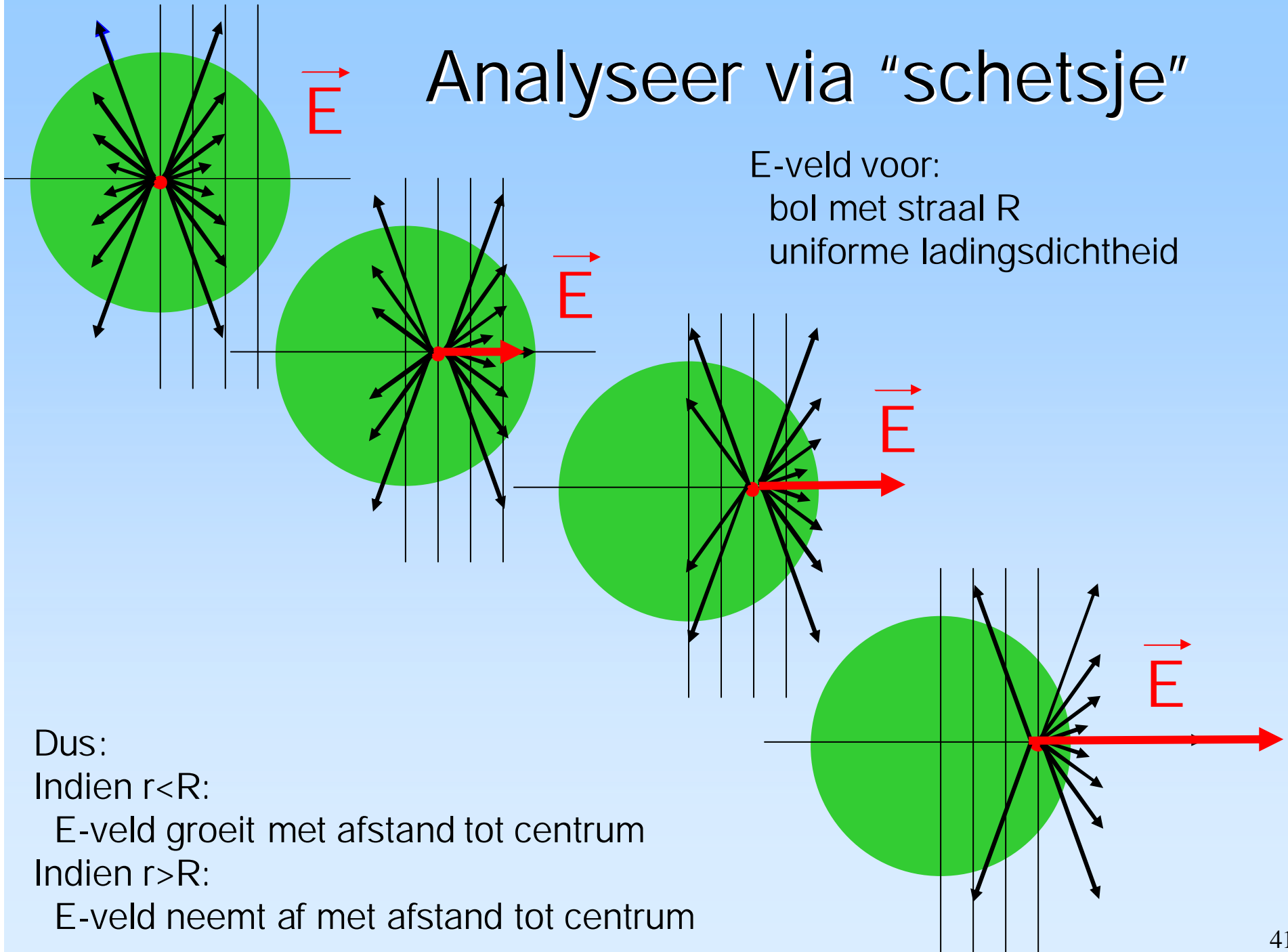
Discussievraag 2

We beschouwen een massieve niet-geleidende bol met uniforme ladingsdichtheid. Welke grafiek geeft het elektrisch veld als functie van de afstand tot het middelpunt van de bol?



Analyseer via "schetsje"

E-veld voor:
bol met straal R
uniforme ladingsdichtheid



Dus:

Indien $r < R$:

E-veld groeit met afstand tot centrum

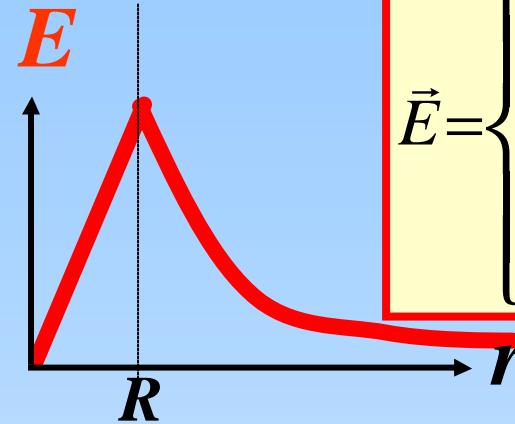
Indien $r > R$:

E-veld neemt af met afstand tot centrum

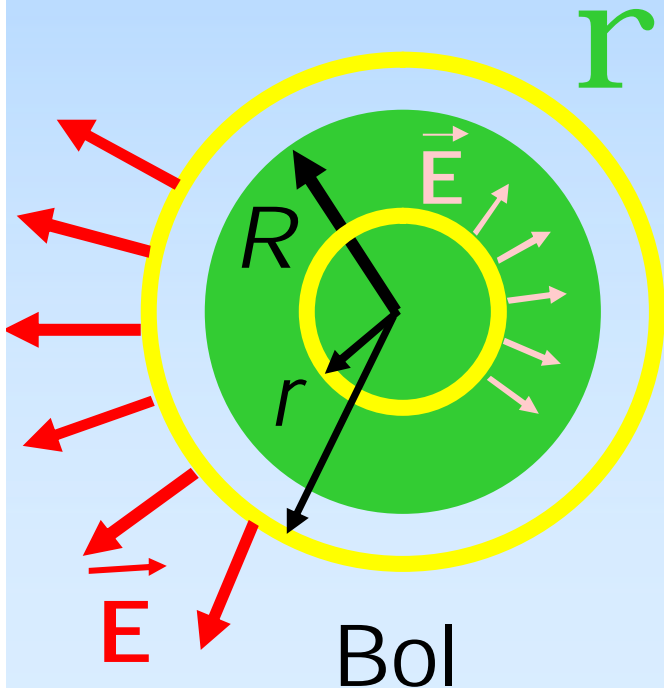
V.b. Gauss: bolvolume

Bolvolume:

- ladingsverdeling: ρ C/m³
- symmetrie: $E \perp \text{bol}$, $E(r)$
- "Gauss box": bolletje



$$\vec{E} = \begin{cases} r \leq R: \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \\ r \geq R: \vec{E} = \frac{\rho R^3 \hat{r}}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$



Flux: $F_E = 4\pi r^2 E$

Wet van Gauss:

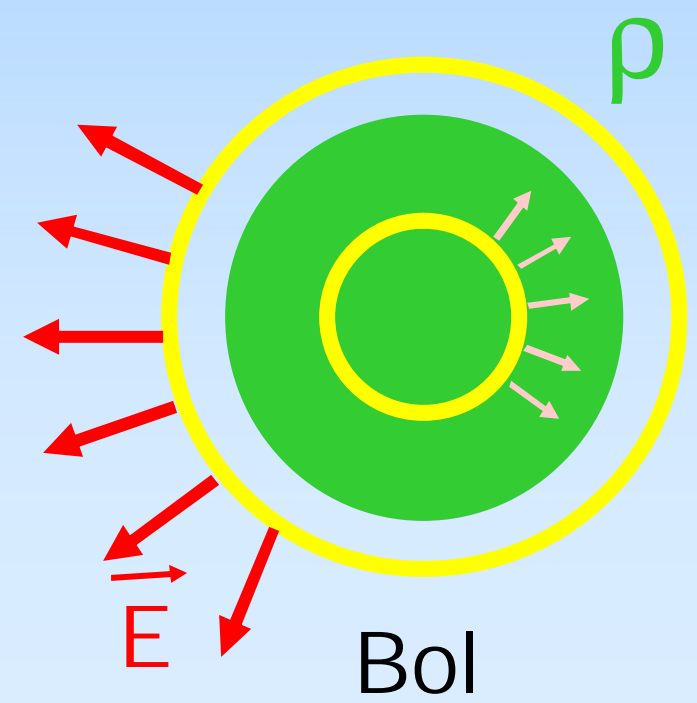
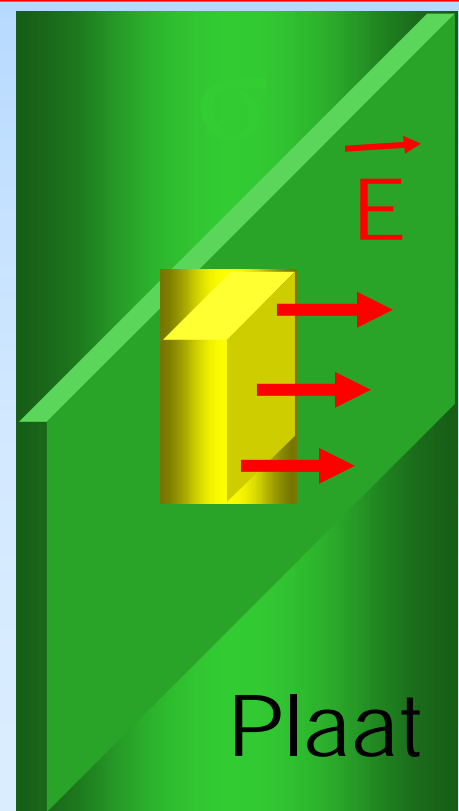
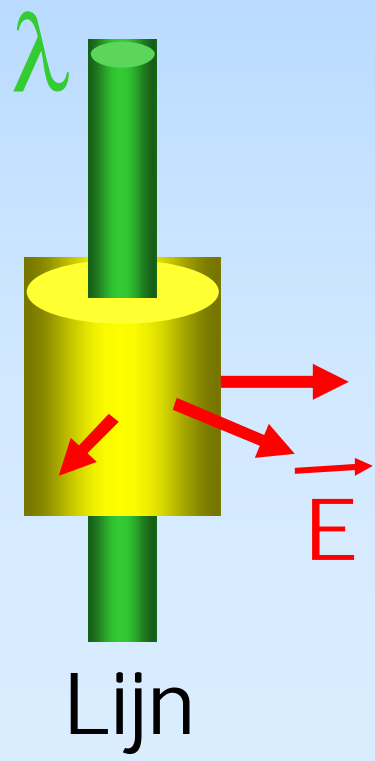
$$F_E = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\text{omsloten}} \vec{E} \cdot d\vec{Q}$$

$$\begin{cases} r < R: 4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \\ r > R: 4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

Overzicht toepassingen wet van Gauss

Symmetrie
voor E-veld
de essentie!

$$\Phi_E \equiv \oint_{\text{oppervlak } O} \vec{E} \cdot d\hat{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{omsloten}} Q_i$$

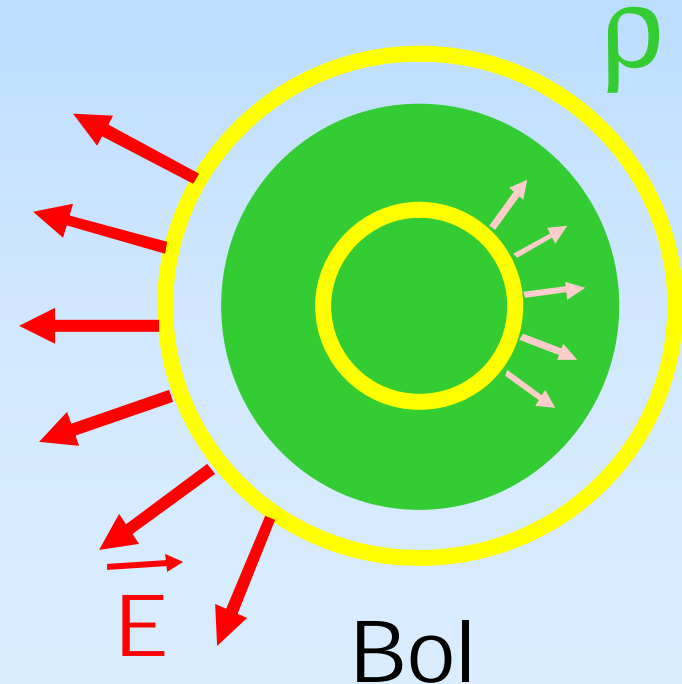
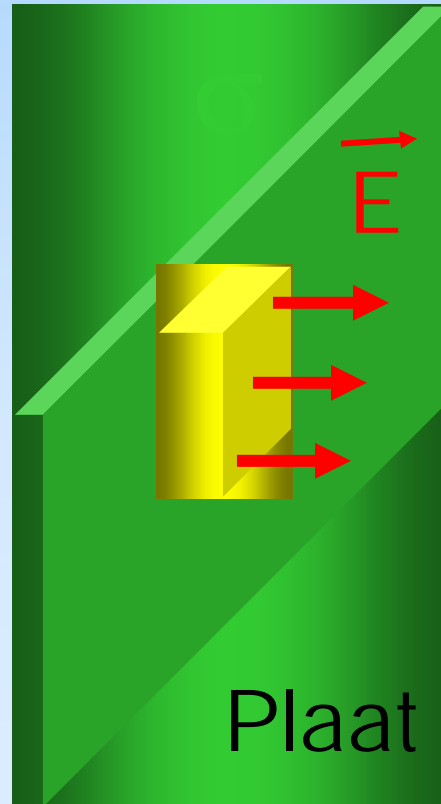
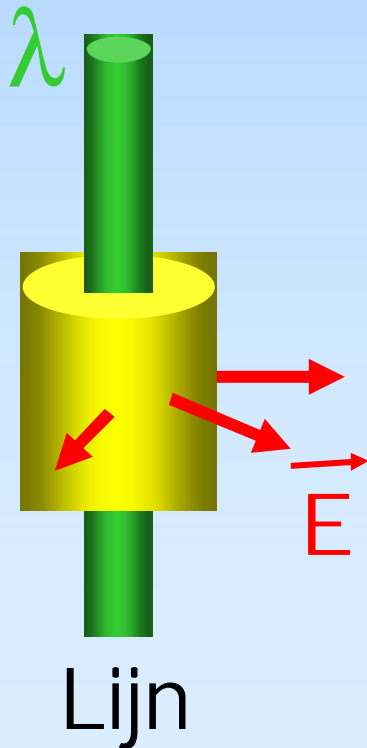


II: Wat heb ik geleerd?

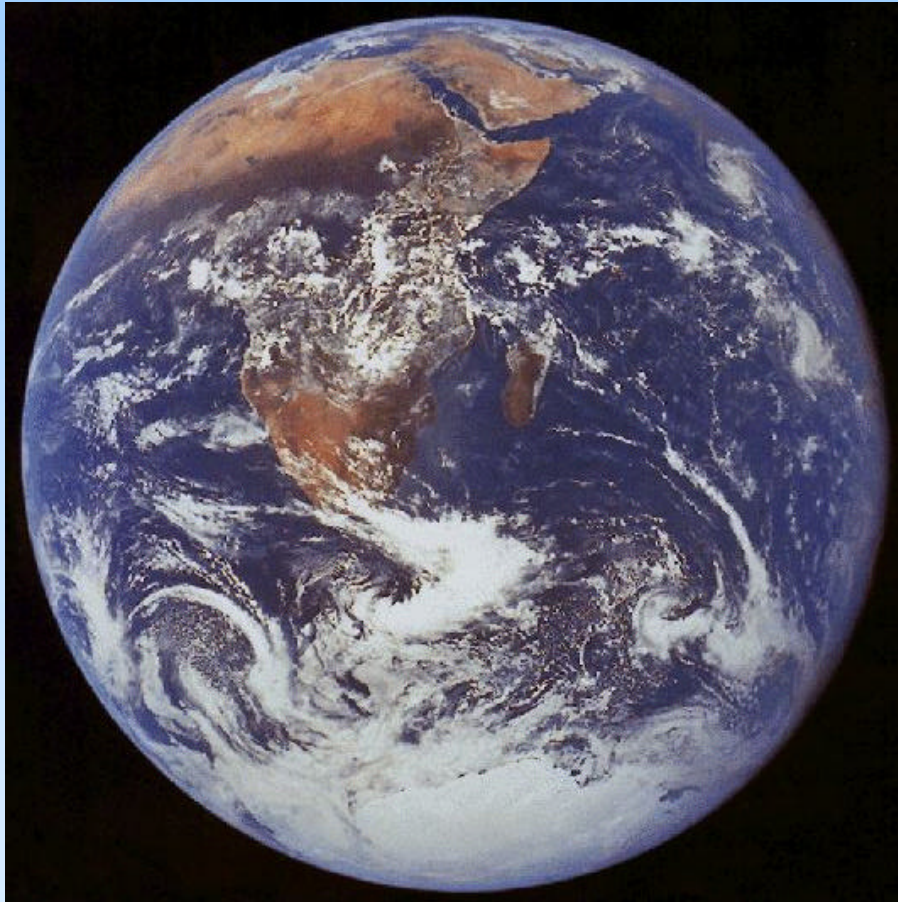
Volume integralen: • cartesische, cilinder & bol coördinaten

Veld uit $\rho(\vec{r})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{direkt} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \mathbf{r}(\vec{r}) \frac{\hat{r}}{r^2} dv \\ \text{via wet van Gauss} \Rightarrow \oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \rho(\vec{r}) dv \end{array} \right.$$



EXTRA V.b.: hoeveel $\text{m}^3 \text{H}_2\text{O}$ ongeveer op aarde?



Straal aarde: $\approx 6.400 \times 10^6 \text{ m}$
Gemiddelde H_2O laag: $\approx 10^3 \text{ m}$

\Rightarrow integratie domein:

r : $[R_i \equiv 6.399 \times 10^6 \text{ m}, R_o \equiv 6.400 \times 10^6 \text{ m}]$

θ : $[0, \pi]$

φ : $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\text{bolschil}} 1 dV &\rightarrow \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\ &= \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{\pi} r^2 \sin \varphi \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta dr = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} r^2 \left(-\cos \varphi \Big|_0^{\pi} \right) dr \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(r^3 \Big|_{R_i}^{R_o} \right) = \frac{4\pi}{3} (R_o^3 - R_i^3) \rightarrow 5.15 \times 10^{17} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Natuurlijk zelfde als volume van een 10^3 m dikke bolschil bij $r = 6.400 \times 10^6 \text{ m}$:

$$\text{H}_2\text{O} \approx 4\pi(6.400 \times 10^6)^2 \times 10^3 \approx 5.15 \times 10^{17} \text{ m}^3$$

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
- 3. **Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal**
4. Elektrische Potentialaal & Energie
5. Elektrische velden in materie: Geleiders
6. Elektrische velden in materie: Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathbf{r} / e_0$$

$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

- Divergentie: §1.2.4
- Stelling van Gauss: §1.3.4
- Energie & Arbeid: §2.4

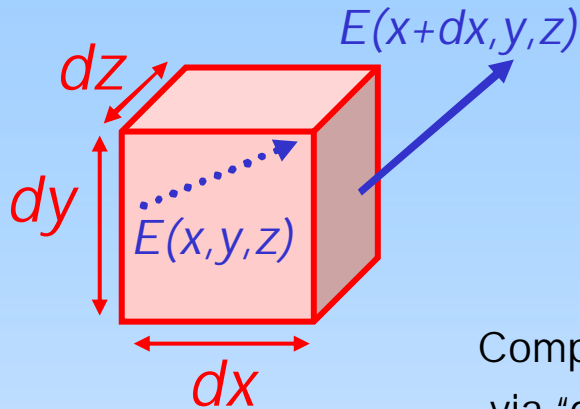
De divergentie van het electrische veld

Stelling van Gauss (wiskunde)

De link tussen natuurkunde en
wiskunde

Stelling van Gauss:

Beschouw flux door infinitesimaal kubusje: $\oint_{\text{oppervlakje}} \vec{E} \times d\vec{o} = dx dy \left(E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z) \right) +$



Compactere notatie via "divergentie"

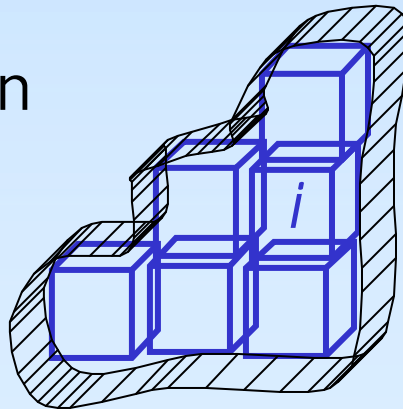
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$+ dz dx \left(E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z) \right) + dy dz \left(E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z) \right)$$

$$= dx dy dz \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

$$= dx dy dz \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) = \oint_{\text{oppervlakje}} \vec{E} \cdot d\vec{o}$$

Neem de 'som' van willekeurig aantal volumetjes:



$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv$$

Geldt voor willekeurig vectorveld

Controle: stelling van Gauss

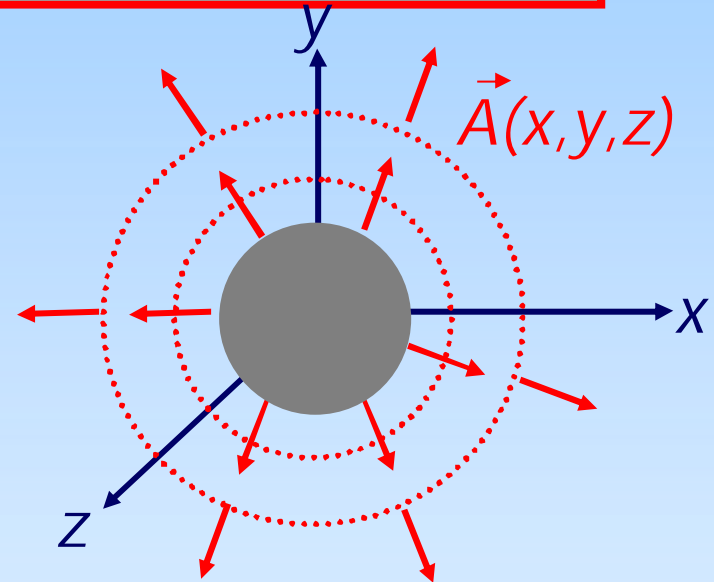
$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{A} \times d\vec{o} = \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \, dv$$

Neem vectorveld:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \circ \hat{r}$$

Bereken eerst divergentie:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r} = \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \\ &= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{r} \end{aligned}$$



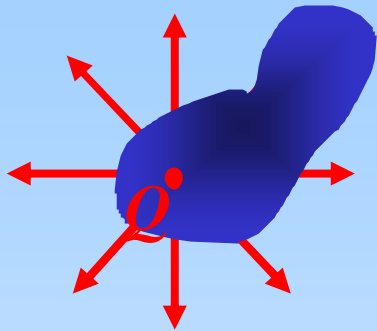
$$\oint_{\text{bol}} \vec{A} \times d\vec{o} \stackrel{\vec{A}=\hat{r}}{=} \oint_{\text{bol}} \hat{r} \times d\vec{o} = \oint_{\text{bol}} d\vec{o} = 4\pi R^2$$

$$\int_{\text{bol}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \, dv = \int_{\text{bol}} \frac{2}{r} \, dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2}{r} r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi = 4\pi \int_0^R 2r \, dr = 4\pi R^2$$

Klopt!

De link: wiskunde & natuurkunde

M.b.v. Wet van Coulomb gevonden:



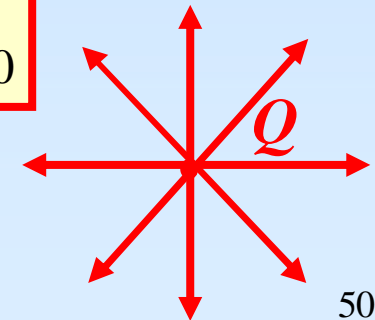
$$\text{Wet van Gauss: } \Phi_E \equiv \oint_{\text{oppervlak } O} \vec{E} \cdot d\hat{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \mathbf{r} \, dv$$

M.b.v. Stelling van Gauss kan je "integrale" verband tussen E-veld en ladingsverdeling omzetten in "differentiaal verband:

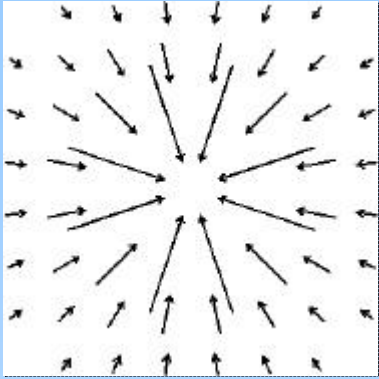
$$\int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \mathbf{r} \, dv \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0}$$

Wiskunde:
Gauss

Natuurkunde:
Coulomb/Gauss



Illustratie: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathbf{r} / \mathbf{e}_0$

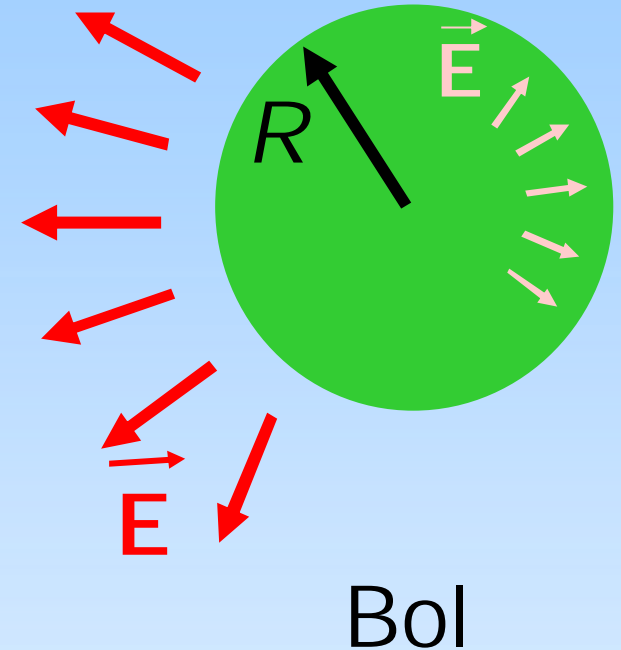
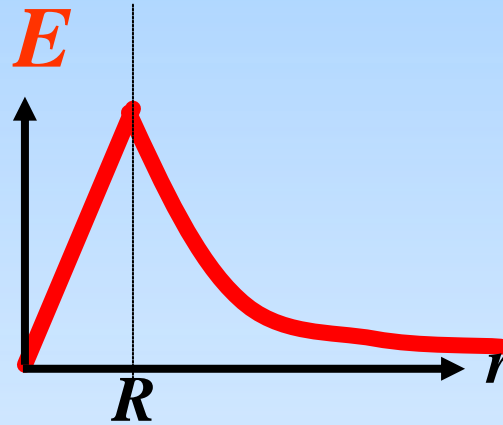


De term
divergentie!

\mathbf{r}

simpel
bolvolume

$$r < R: \vec{E} = \frac{\mathbf{r}\vec{r}}{3\mathbf{e}_0}$$



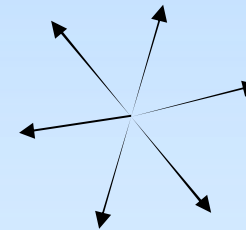
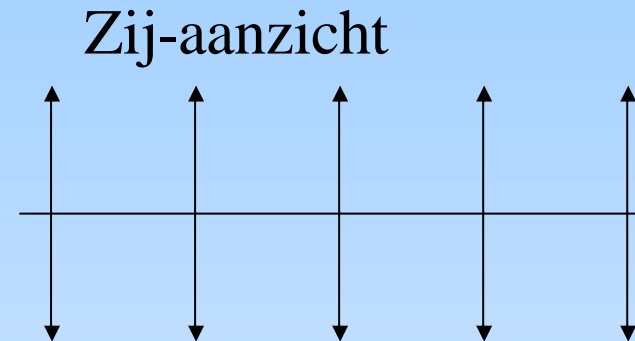
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{r}\vec{r}}{3\mathbf{e}_0} = \frac{\mathbf{r}}{3\mathbf{e}_0} (\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z) = \frac{\mathbf{r}}{3\mathbf{e}_0} 3 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}_0}$$

Voor $r > R$ vind je $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (mogen jullie zelf verifiëren)

Discussievraag 4

Het veld rond lijnlading is hieronder geschetst. De gelijkheid $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ geldt:

- A overall
- B overall, behalve op de lijn
- C nergens, behalve op de lijn
- D nergens



bovenaanzicht

De kringintegraal van het elektrische veld

- Potentiële energie en arbeid

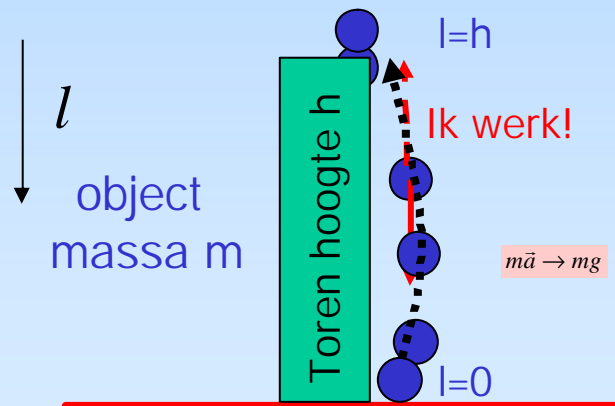
Potentiële Energie

Hoe bepaal je potentiële energie?

Even terug naar Newton en de Zwaartekracht!

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{Arbeid (Work):} \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Hoeveel Arbeid nodig om massa m van hoogte $h=0$ op hoogte $h=h$ te brengen?



$$W = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{l} = mgh$$

Verskil in potentiële energie \equiv Benodigde Arbeid
(Let op: dit is de arbeid die ik hier moet verrichten!)
Pas op met mintekens: arbeid verricht door gravitatiekracht heeft tegengesteld teken. Hangt ook van definitie van variabelen af. Wees consistent.

Laten we dit principe nu eens toepassen om de elektrische potentiële energie te bestuderen!

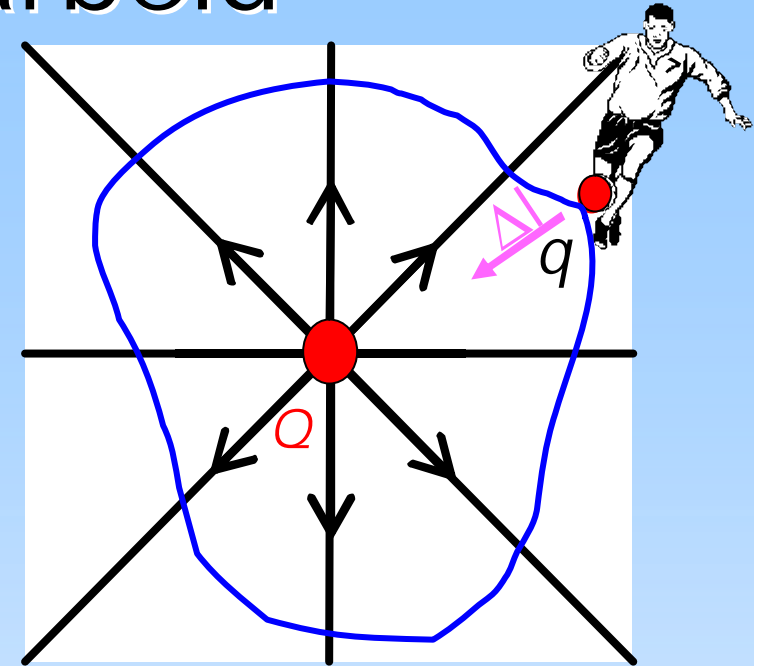
Lading verslepen → arbeid

Kracht op testlading q in veld van bronlading Q : $\vec{F} = q\vec{E} = Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Arbeid bij verplaatsing $\Delta\vec{l}$

- E-veld: $\Delta W = +q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$
- 'Persoon': $\Delta W = -q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$

Dit college: arbeid verricht door persoon!



Verplaatsing q van A naar B :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{l}: W \equiv -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\vec{E} \cdot d\vec{l} \\ A \rightarrow B: W \equiv -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} \\ A \rightarrow A: W \equiv -\oint_{\text{kring: } A \rightarrow A} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right.$$

Voor iedere kring en voor iedere ladingsverdeling:

$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

III: Wat heb ik geleerd?

Divergentie

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Stelling van Gauss: $\oint_{\text{oppervlak}} \vec{A} \cdot d\vec{o} = \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv$

Verband E en ρ

$$\int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \rho dv \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Wiskunde:
Gauss

Natuurkunde:
Coulomb/Gauss

Voor iedere kring en voor iedere ladingsverdeling:

$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
3. Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal
- ➔ 4. **Electrische Potentiala & Energie**
5. Elektrische velden in materie: Geleiders
6. Elektrische velden in materie: Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathbf{r} / e_0$$

$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

- Gradiënt: §1.3.2 en §1.3.3
- Potentiala V: §2.3 m.u.v. §2.3.3
- Energie & Arbeid: §2.4

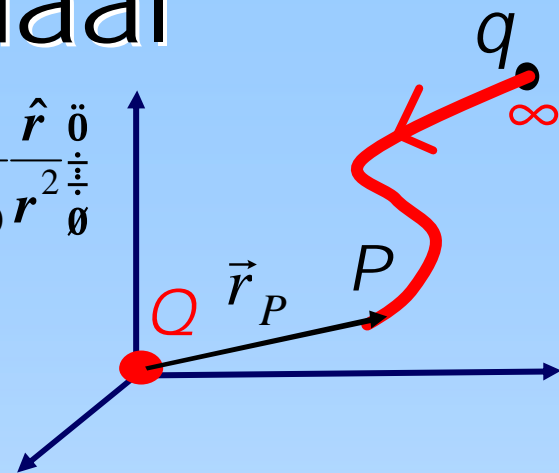
De elektrische potentiaal

- Potentiële energie en arbeid
- De gradiënt
- Veld en Potentiaal
- De dipool

Elektrische Potentiaal

Beweeg testlading q in \vec{E} veld van bronlading Q vanuit ∞ naar punt P .

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



Arbeid door persoon = verschil in potentiële energie

$$W = - \int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^P q\vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^P q |\vec{E}| dr = U_P = - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_P} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P}$$

Veelgebruikte definitie potentiaal:
(‘stilzwijgend’ ijkpunt in ∞)

$$V_P = U_P / q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_P}$$

Algemene definitie potentiaal:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P}$$

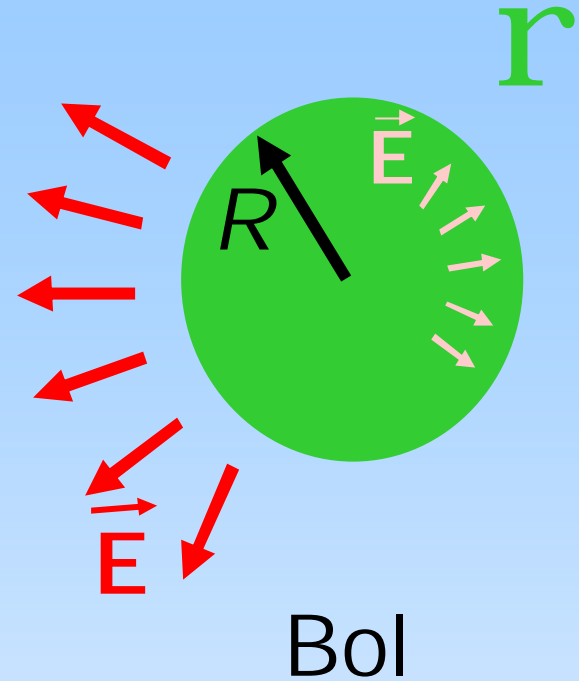
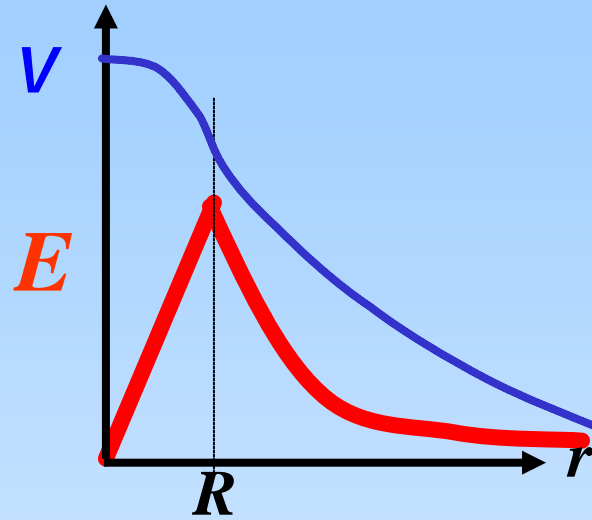
v.b. Potentialiaal uniform geladen Bol

E veld m.b.v. Wet van Gauss

$$r < R: \vec{E} = \frac{? \vec{r}}{3e_0}$$

$$r > R: \vec{E} = \frac{? R^3}{3e_0 r^2} \hat{r}$$

$$V(r) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$r > R: V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{? R^3}{3e_0 r'^2} \hat{r}' \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \frac{? R^3}{3e_0 r'^2} \hat{r}' \cdot \hat{r}' dr' = - \int_{\infty}^r \frac{? R^3}{3e_0 r'^2} dr' = \frac{? R^3}{3e_0 r}$$

$$r < R: V(r) = - \int_{\infty}^R \frac{? R^3}{3e_0 r'^2} dr' - \int_R^r \frac{? r'}{3e_0} dr'$$

$$= V(R) - \frac{? r'^2}{6e_0} \Big|_R^r = \frac{? R^2}{3e_0} - \frac{? r^2}{6e_0} + \frac{? R^2}{6e_0} = \frac{? R^2}{2e_0} - \frac{? r^2}{6e_0}$$

Wat heb je hieraan?

Komt nog!

Potentiaal V en Elektrisch veld \vec{E}

$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_P}$$

Hoe bepaal je het elektrische veld?

Potentiaal verschil: $V_{AB} = V_B - V_A = \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

V is een scalaire functie:

$$V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$= \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Verkorte schrijfwijze:
de Gradiënt

$$= \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot (dx, dy, dz) = \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$

Gradiënt van V , bepaalt \vec{E}

\Rightarrow

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

v.b. gradiënt

functie $T(x,y,z)$ geeft Temperatuur

$d\vec{T} = \nabla T \cdot d\vec{l}$ maximaal indien

$$d\vec{l} // \vec{\nabla} T$$



expliciet voorbeeld:

$T(x,y,z)$ als 'afstandfunctie'
redeneren:

$$T(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

- $\vec{\nabla} T$ in de radiële richting
 - $|\vec{\nabla} T| = 1$ want $dT = dr$
- $$\} \vec{\nabla} T = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r}$$

rekenen:

$$\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \dots \right) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \dots \right) = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r}$$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r}$$

Bolsymmetrische functies: $\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \hat{r}$

Gradiënt van de Potentialiaal

$$\vec{E} = -\tilde{N}V$$

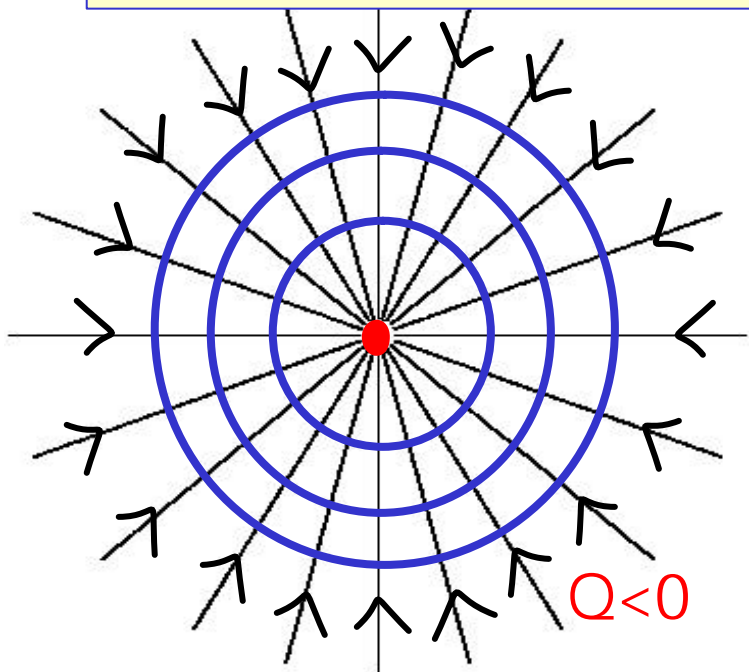
Controle voor
puntlading:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Veldlijnen & equi-potentiaallijnen



$$\begin{aligned} \tilde{N} \frac{1}{r} &= \tilde{N} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \dots \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \dots \hat{k} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{j} - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \\ &= -\frac{\hat{r}}{r^2} \end{aligned}$$

Of gebruik: $\tilde{N}f(r) = \frac{df}{dr} \hat{r}$

Grafisch: elektrische veldlijnen equipotentiaalijnen

Veldlijnen, equipotentiaalijnen etc.

Elektrische veldlijnen:

Lijnenpatroon die richting en sterkte van het elektrisch veld weergeeft

Equipotentiaalijnen:

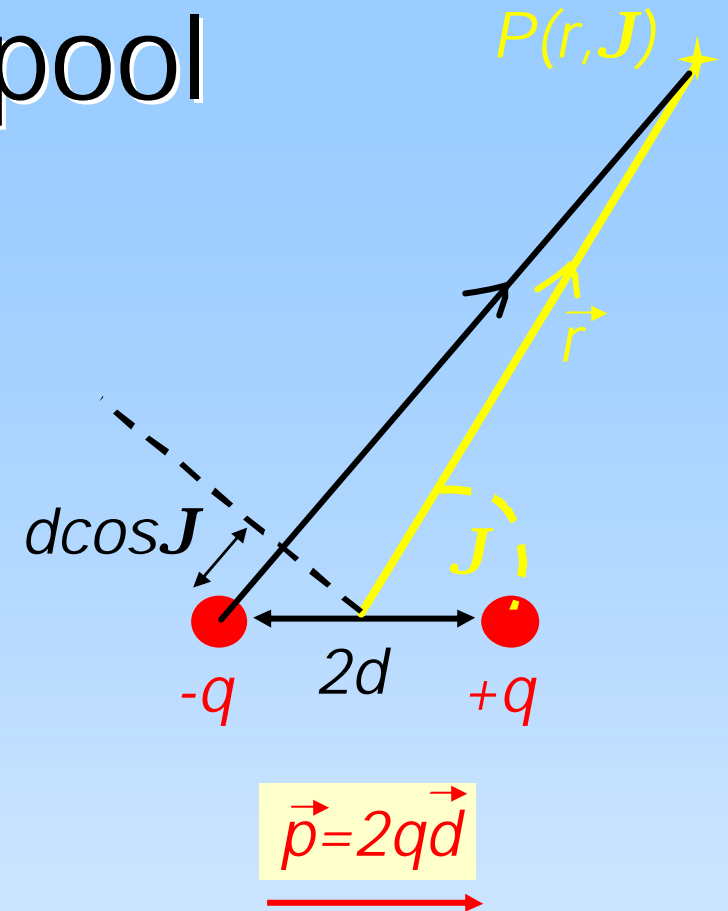
Kollectie van krommen waarbij langs iedere kromme de potentiaal een constante waarde heeft

Omdat $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ en omdat $\vec{\nabla}V$ de richting aangeeft waarin V het sterkst verandert staat $\vec{E} \perp$ krommen met $V = \text{constant}$!

V.b. potentiaal dipool

Coördinaten voor punt P: (r, ϑ) :

$$\begin{aligned}
 V_P(r, \mathbf{J}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r-d\cos\mathbf{J}} - \frac{1}{r+d\cos\mathbf{J}} \right) \\
 &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d\cos\mathbf{J}}{r^2} = \frac{2qd\cos\mathbf{J}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
 &\equiv \frac{p\cos\mathbf{J}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$



Bereken nu E via de potentiaal V:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_P(r, \mathbf{J}) &\equiv -\vec{\nabla} V_P(r, \mathbf{J}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3}, \dots \right) \\
 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p_x}{r^3} - \frac{3x(xp_x + yp_y + zp_z)}{r^5}, \dots \right) = \frac{-\vec{p} + 3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{p})}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$

Potentiaal is dus handig:
 • geen vector
 • (en meetbaar)

Discussievraag 3

Voor een puntlading geldt $E \sim 1/r^2$ en $V \sim 1/r$

Voor een lijnlading geldt $E \sim 1/r$ je verwacht voor V :

A $V = \text{constante}$

B $V \sim \ln r$

C $V \sim 1/r$

D $V \sim r$

Energie

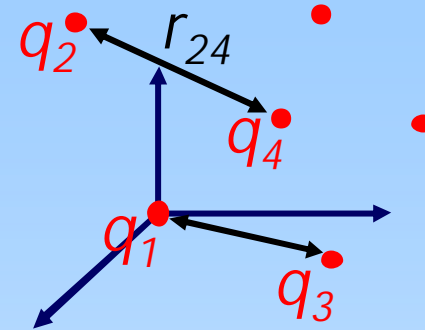
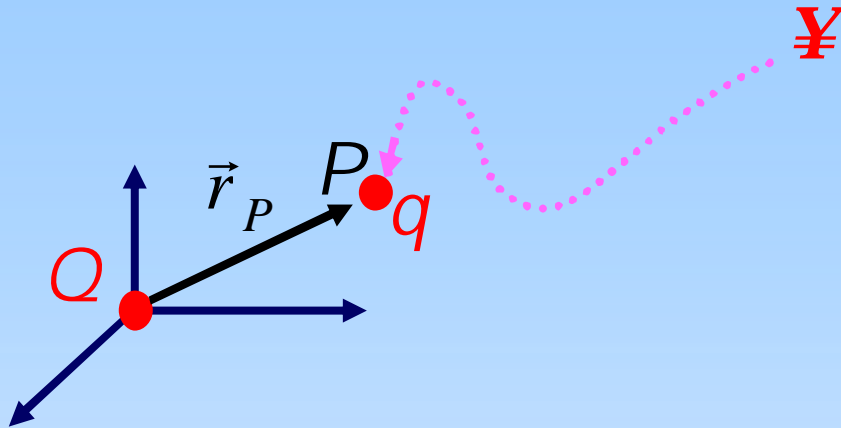
De energie van een ladingsverdeling

De energie van het elektrische veld

Energie van een ladingsverdeling

Energie in ladingsconfiguratie?

Voor N ladingen q_1, q_2, \dots



Integreer kracht op q van $\infty \rightarrow P$

$$\begin{aligned}
 W &= -\int_{\infty}^P \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^P q\vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= \int_{\infty}^P q\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = qV_P = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_P}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \\
 W_{123} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \equiv \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i)
 \end{aligned}$$

Voor energie U:
 $(\Delta U_{\text{veld}} = W)$

$$U \equiv W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \rho V(\vec{r}) dv$$

energie in het E - veld

Energie ladingsverdeling:

$$\text{Diskreet: } U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i)$$

$$\text{Continu: } U = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

Energie in termen van E-veld?

Gebruik:
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) = \frac{\partial(E_x V)}{\partial x} + \dots = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right) V + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) E_x + \dots = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V$$

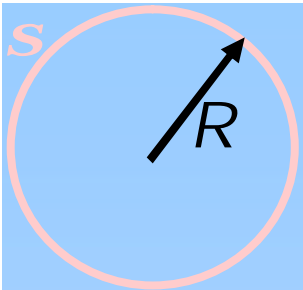
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Afleiding voor liefhebbers!

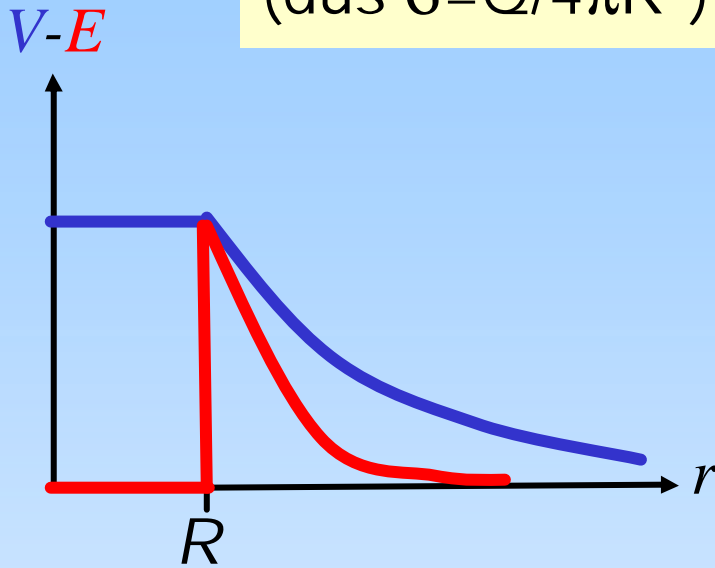
$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \rho V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V dv$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) + \vec{E} \cdot \vec{E} dv = \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_{\text{oppervlak}} \cancel{d\vec{o}} \cdot \vec{E}V + \int_{\text{volume}} E^2 dv \right\} \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$$



Energie geladen boloppervlak

straal R en lading Q
(dus $\sigma = Q/4\pi R^2$)



Gauss:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} r > R: \frac{R^2 \sigma}{r^2} \hat{r} \\ r < R: 0 \end{cases}$$

$$V(r) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$V(r) = \begin{cases} r > R: - \int \frac{R^2 \sigma}{r^2} dr = \frac{R^2 \sigma}{r} \\ r < R: - \int \frac{R^2 \sigma}{r^2} dr = V(R) + 0 = \frac{R \sigma}{\epsilon_0} \end{cases}$$

1^e methode: via σ en potentiaal

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{oppervlak}} \sigma V d\omega \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{oppervlak}} \sigma \frac{R\sigma}{\epsilon_0} d\omega$$

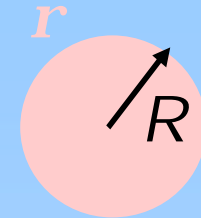
$$= \frac{1}{2} 4\pi R^2 \frac{R\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi R \epsilon_0}$$

2^e methode: via E-veld

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r>R} \left(\frac{R^2 \sigma}{r^2} \right)^2 dv$$

$$= \frac{-4\pi \epsilon_0 R^4 \sigma^2}{2 r \epsilon_0} \Big|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi R \epsilon_0}$$

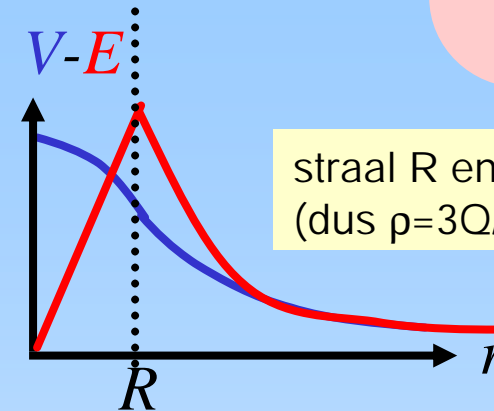
Energie geladen bolvolume



We hebben gezien:

$$V(r) = \begin{cases} r > R: V(r) = \frac{rR^3}{3e_0} \\ r \leq R: V(r) = \frac{rR^2}{2e_0} - \frac{rr^2}{6e_0} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} r > R: \frac{?R^3}{3r^2e_0} \hat{r} \\ r < R: \frac{?r}{3e_0} \end{cases}$$



straal R en lading Q
(dus $\rho = 3Q/4\pi R^3$)

1^e methode: via het E-veld

$$U = \frac{e_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv = \frac{4pe_0}{2} \left(\int_0^R \frac{r^2 r^4}{9e_0^2} dr + \int_R^\infty \frac{r^2 R^6}{9e_0^2 r^2} dr \right) = \frac{4pe_0}{2} \left(\frac{r^2 R^5}{45e_0^2} + \frac{r^2 R^6}{9e_0^2 R} \right) = \frac{4p}{15} \frac{r^2 R^5}{e_0}$$

2^e methode: via ρ en de potentiaal V

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{bolvolume}} r V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{bolvolume}} r \left(\frac{rR^2}{2e_0} - \frac{rr^2}{6e_0} \right) dv = \frac{r^2}{4e_0} 4p \left(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{15} \right) = \frac{4p}{15} \frac{r^2 R^5}{e_0}$$

3^e methode: laagsgewijs: straal r "groeit" van r=0 naar r=R

$$dq = r 4p r^2 dr \Rightarrow dU = V(r) dq = \frac{r^2 r^2}{3e_0} 4p r^2 dr \Rightarrow U = \int_0^R \frac{r^2 r^2}{3e_0} 4p r^2 dr = \frac{4p}{15} \frac{r^2 R^5}{e_0}$$

IV: Wat heb ik geleerd?

Puntlading

$$V(\mathbf{r}) = - \oint_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Kracht, \vec{E} -Veld
en Potentiaal

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ en } \begin{cases} \text{puntlading: } \vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ en } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \text{dipool: } \vec{E} = \frac{3\hat{r}(\vec{p}\cdot\hat{r}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ en } V = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

Gradiënt $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Energie
ladingsverdeling

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \int_{\text{volume}} \mathbf{r} V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$$

EXTRA: V.b. potentiaal ∞ lange draad

Bereken V_P direct:

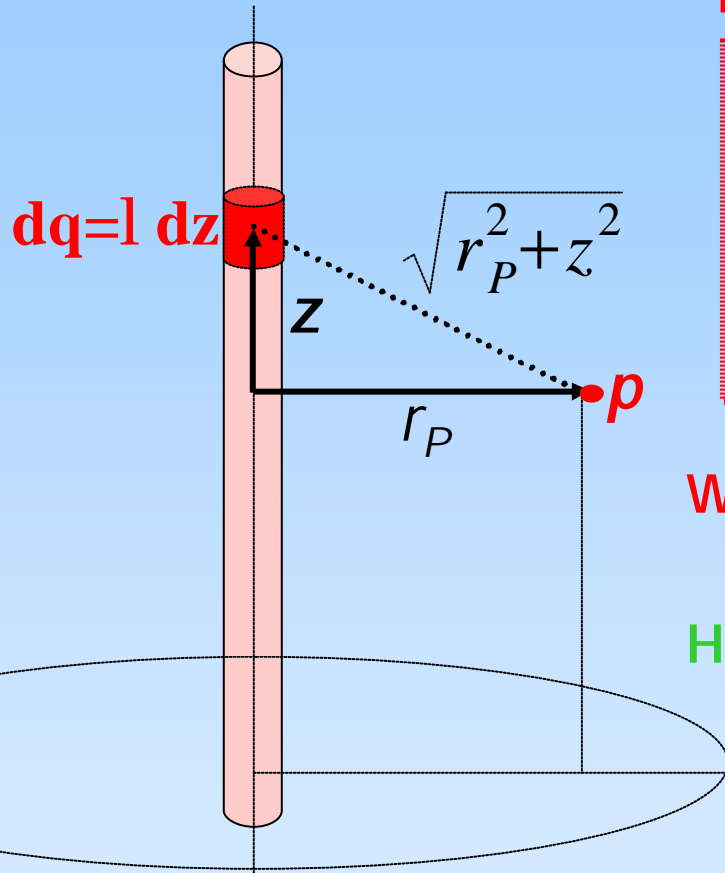
$$V_P(r_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{r_P^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \text{ongedefinieerd!}$$

Wat mis?

Uitdrukking V geldt indien $V(\infty)=0$!

Hoe wel?

Kies $V=0$ referentie punt anders:
b.v. @ $r=1$ i.p.v. @ $r = \infty$



$$V_P \equiv \int_P^{r=1} \vec{E}_P(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_P^{r=1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_P}^1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_P$$

Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
3. Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal
4. Elektrische Potentialaal & Energie
- ➔ 5. **Elektrische velden in materie: Geleiders**
6. Elektrische velden in materie: Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathbf{r} / e_0$$
$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

- Geleiders: §2.5
- Beeldladingen: §3.2 m.u.v. §3.2.4
- Condensator: §2.5.4

Geleider

De karakteristieken

De beeldladings methode

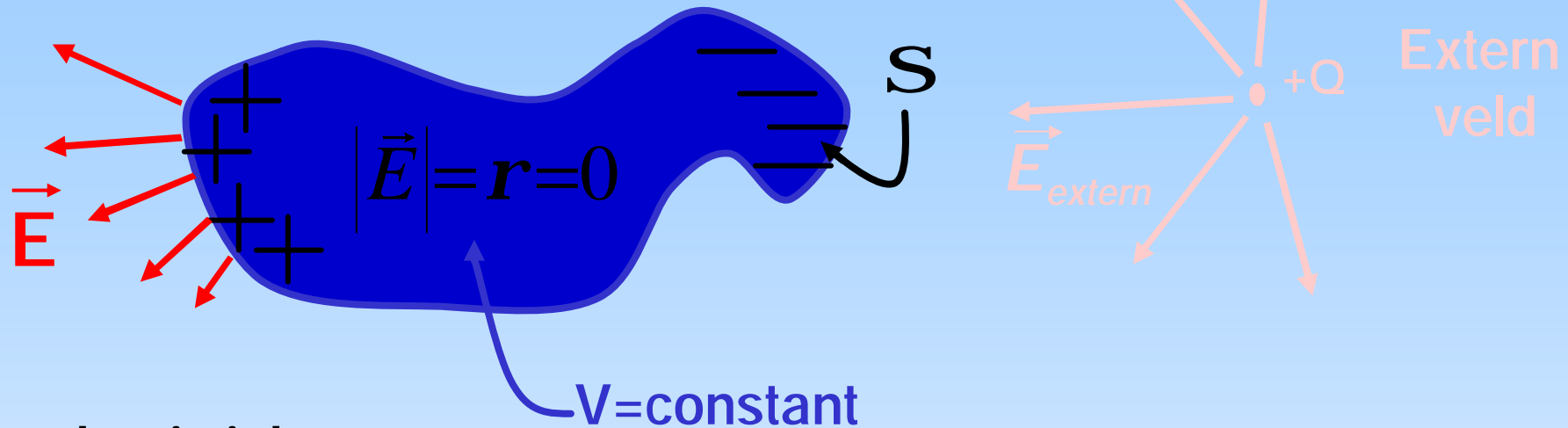
De symmetrie (Gauss) methode

De condensator

Voorbeelden

Materie: de geleider

Geleider: (∞) veel vrije ladingdragers!



Karakteristieken:

- $\vec{E} = \vec{0}$ in geleider
- lading op de rand
- $\rho = 0$ in geleider
- $E \perp$ geleideroppervlak
- $V_{\text{geleider}} = \text{constant}$

$\vec{E} \neq \vec{0} \Rightarrow$ lading gaat bewegen!
waar anders!

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$\vec{E}_{\parallel} \neq \vec{0} \Rightarrow$ lading gaat bewegen!

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

DEMO: Ladingstransport

LADINGSTRANSPORT (ping-pong bal)



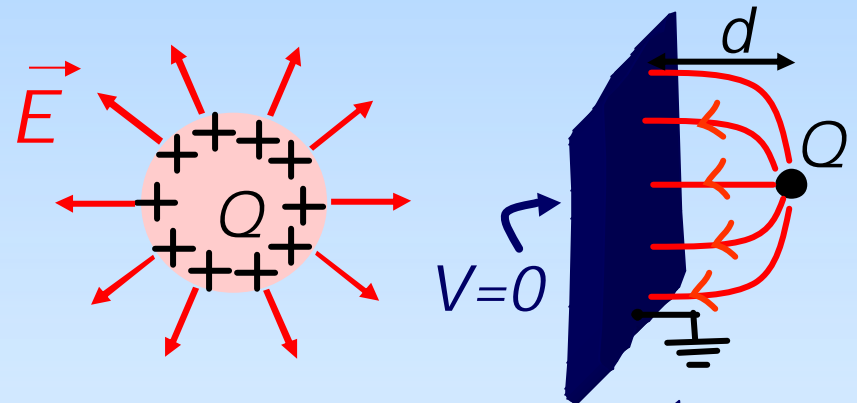
Twee condensatorplaten worden tegegesteld geladen. Een geleidend gemaakte ping-pong bal wordt tegen één plaat geduwd. De bal springt tussen de platen heen en weer omdat hij beurtelings van de platen lading opneemt. Door het veld wordt de bal voortgestuwd. De bal transporteert lading van de éne plaat naar de andere.

Geleider: Hoe pak je het aan?

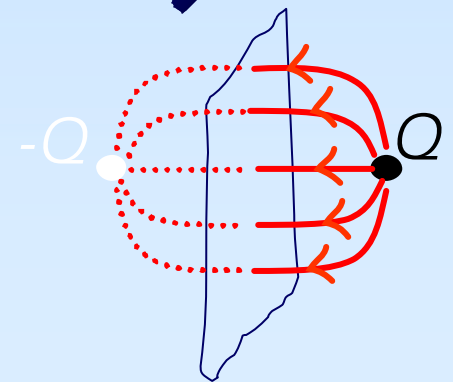
Bekend: $\vec{E}=0$ in geleider Onbekend: oppervlakteladingsverdeling σ
 $E \perp$ geleideroppervlak
potentiaal V (of lading Q)

standaard methode $\vec{E}_P(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume } \vec{r} \neq 0} \frac{\mathbf{r}(\vec{r})(\vec{r}_P - \vec{r})}{|\vec{r}_P - \vec{r}|^3} d^3\vec{r}$ werkt niet!

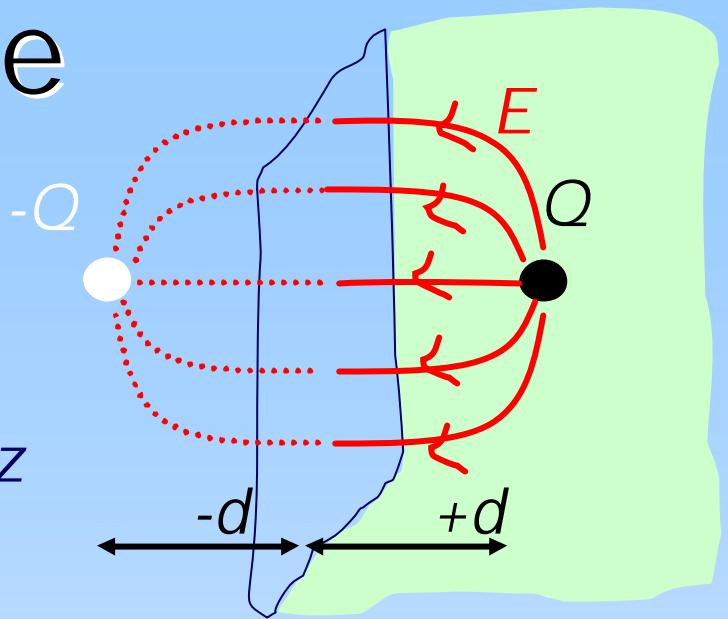
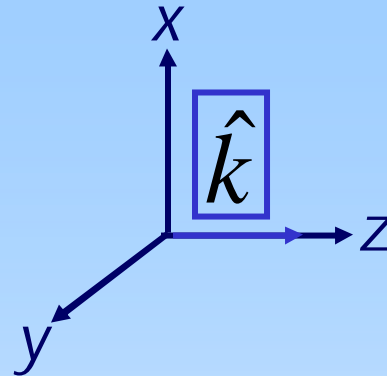
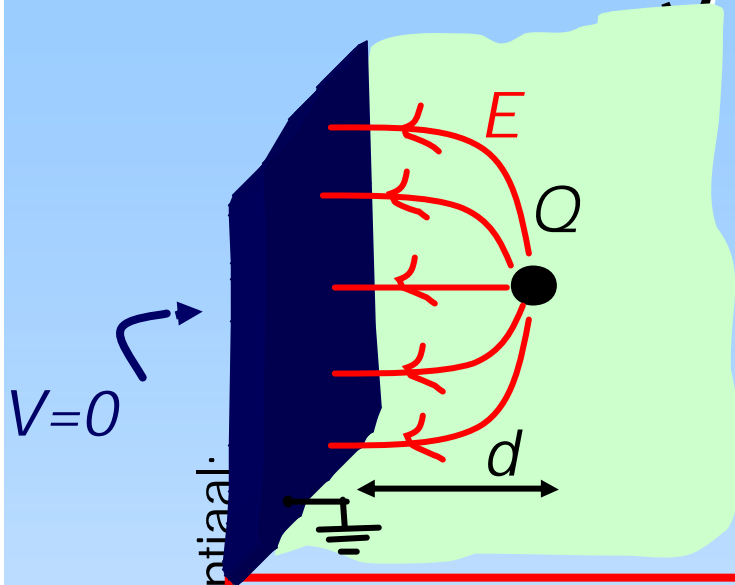
I. symmetrie \rightarrow richting van E ?
 \Rightarrow wet van Gauss geeft E



II. Simuleer invloed geleider door ladingen?
 \Rightarrow "beeldladings methode" geeft E



Beeldladingsmethode



Ladingsdichtheid:

Potentiaal:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

$$E\text{-veld} \perp \text{geleider: } \vec{E}(x, y, 0) \equiv -\vec{\nabla}V(x, y, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{k}$$

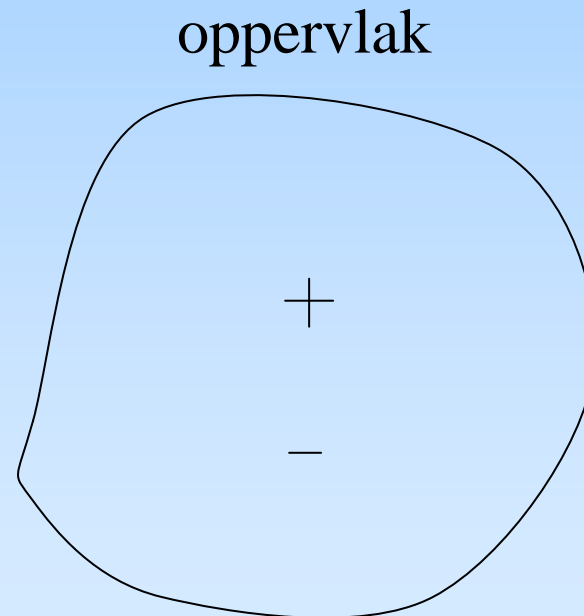
$$\frac{s(x, y)}{\epsilon_0} = \hat{k} \cdot \vec{E}(x, y, 0) = \frac{-Q2d}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_{\text{totaal}} \equiv \int_{\text{plaat}} s(x, y) dx dy = \frac{-Q2d}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} d\mathbf{j} dr = -Qd \frac{-1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^{\infty} = -Q$$

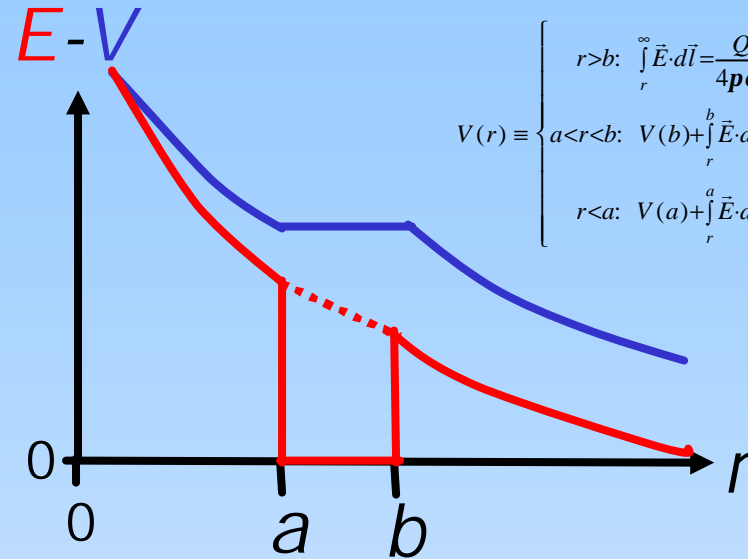
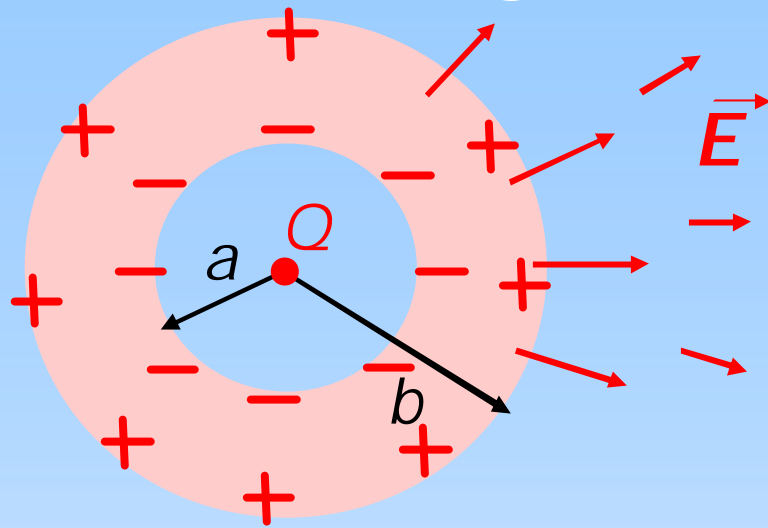
Discussievraag 5

In de onderstaande situatie met twee even grote maar tegengestelde ladingen geldt:

- A** $E=0$ op het hele oppervlak
- B** De component van E loodrecht op het oppervlak is overal nul
- C** A en B zijn beide onjuist



Puntlading met geleidende bolschil

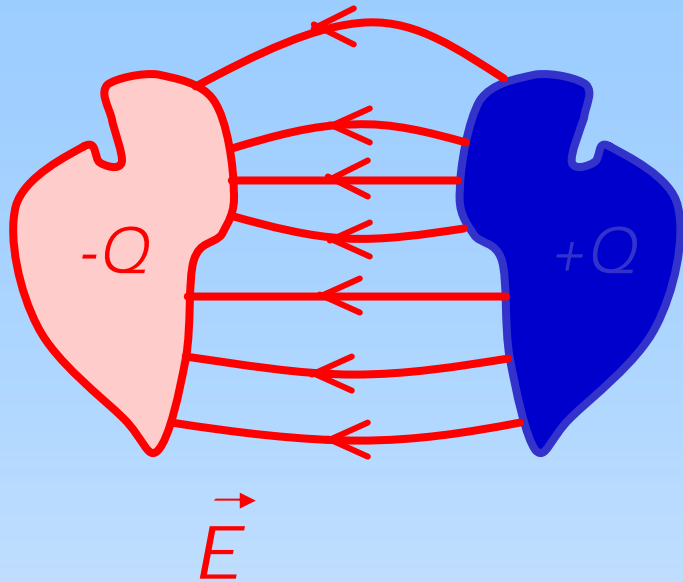


$$V(r) \equiv \begin{cases} r > b: \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ a < r < b: V(b) + \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \\ r < a: V(a) + \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \right) \end{cases}$$

Symmetrie: E-veld radieel \Rightarrow wet van Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} r < a: \text{Gauss bol} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ a < r < b: |\vec{E}| = 0, \text{ Gauss bol} \Rightarrow 0 = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\text{lading } r=a} dq \Rightarrow \mathbf{s}_a = \frac{-Q}{4\pi a^2} \\ r > b: \oint_{\text{geleider}} dq = 0 \Rightarrow \mathbf{s}_b = \frac{+Q}{4\pi b^2} \text{ Gauss bol} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{array} \right.$$

Condensator



$$V \equiv V_{+Q} - V_{-Q} = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} \propto Q$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{V} = \text{constant} \equiv C$$

C heet: "capaciteit"

Eenheid:

$[C] = [Q]/[V] = \text{Coulomb/Volt} \equiv \text{Farad}$

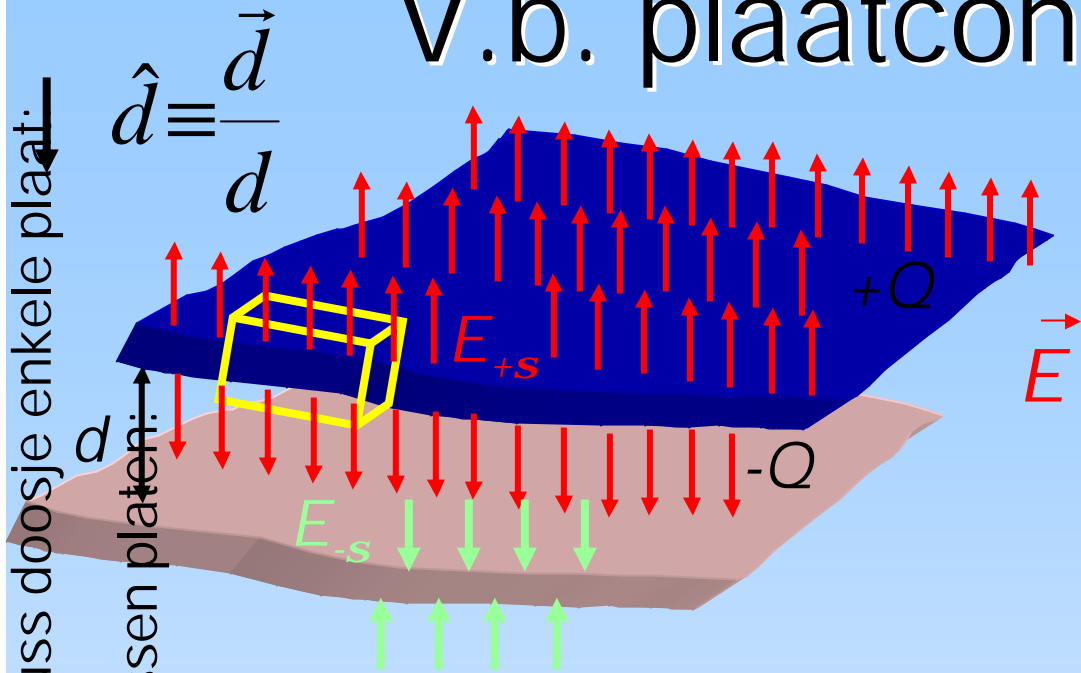
Praktijk: μF d.w.z. 10^{-6} F

Energie van condensator :

$$\left. \begin{array}{l} q \rightarrow q + \Delta q \\ U \rightarrow U + \Delta U \end{array} \right\} \Delta U = V(q) \Delta q = \frac{q \Delta q}{C}$$

$$\Rightarrow U \equiv \sum \Delta U \rightarrow \int dU = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2C} q^2 \Big|_0^Q = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C V^2$$

V.b. plaatcondensator



- Plaatcondensator:
- lading Q
 - separatie d
 - oppervlak A

$$2E_s(dA) = \frac{\mathbf{s}(dA)}{\epsilon_0} \Rightarrow E_s = \frac{\mathbf{s}}{2\epsilon_0}$$

$$E = E_{+s} + E_{-s} = \frac{\mathbf{s}}{2\epsilon_0} + \frac{\mathbf{s}}{2\epsilon_0} = \frac{\mathbf{s}}{\epsilon_0}$$

$$V \equiv \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow \int_0^d \frac{\mathbf{s}}{\epsilon_0} dx = \frac{\mathbf{s}d}{\epsilon_0}$$

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\mathbf{s}A\epsilon_0}{\mathbf{s}d} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

DEMO:

Plaatcondensator



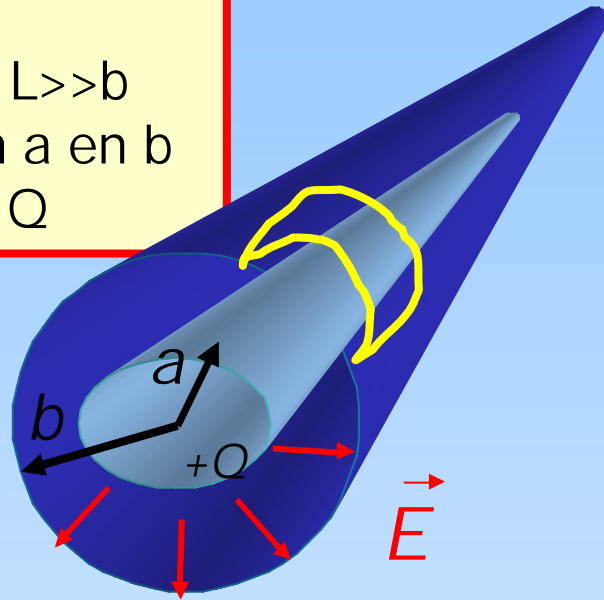
CAPACITEIT EN PLAATAFSTAND

Een plaatcondensator is verbonden met een elektroscop. De condensator wordt opgeladen. Bij toenemende plaatafstand neemt de capaciteit af, waardoor de spanning over de platen groter wordt.

V.b. Cilinder- en bolcondensator

Cilinder

- lengte $L \gg b$
- stralen a en b
- lading Q



$$\text{Gauss cilindertje : } E_r 2\pi r l = \frac{\epsilon_0 2\pi a l}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\epsilon_0 a}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\text{-veld: } \vec{E} = \vec{E}_r = \frac{\epsilon_0 a}{r} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \text{potentiaal: } V \equiv \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_a^b \frac{\epsilon_0 a}{r} dr = \frac{\epsilon_0 a}{\epsilon_0} \ln(b/a)$$

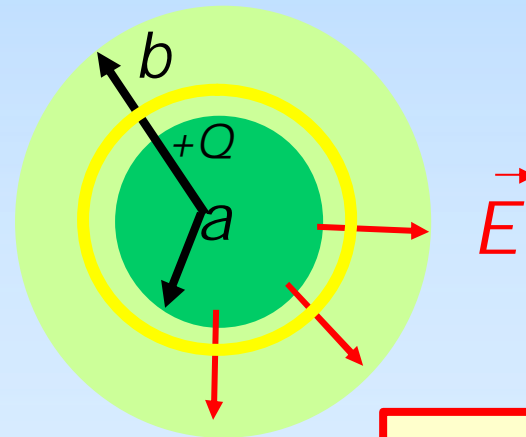
$$\Rightarrow \text{capaciteit: } C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{2\pi a L \epsilon_0}{\epsilon_0 a \ln(b/a)} = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

$$\text{Gauss bolletje : } E_a 4\pi r^2 = \frac{\epsilon_0 4\pi a^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{\epsilon_0 a^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\text{-veld: } \vec{E} = \vec{E}_r = \frac{\epsilon_0 a^2}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \text{potentiaal: } V \equiv \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_a^b \frac{\epsilon_0 a^2}{r^2} dr = \frac{\epsilon_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \text{capaciteit: } C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{4\pi a^2 \epsilon_0}{\epsilon_0 a^2 (1/a - 1/b)} = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$



Boloppervlakken

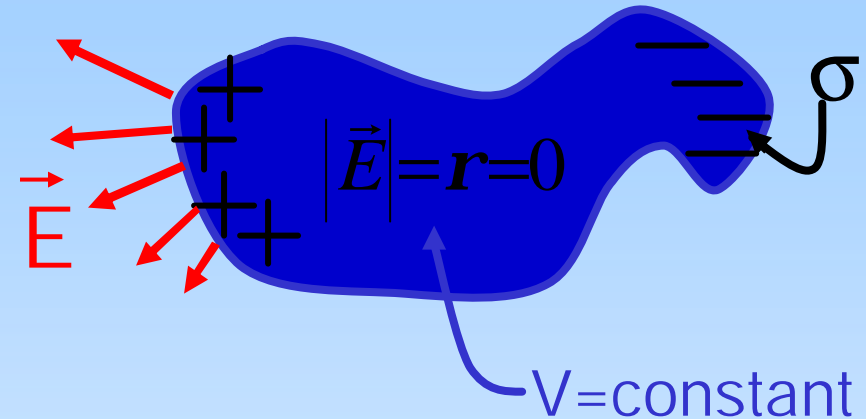
- stralen a en b
- lading Q

V: Wat heb ik geleerd?

Materialen:

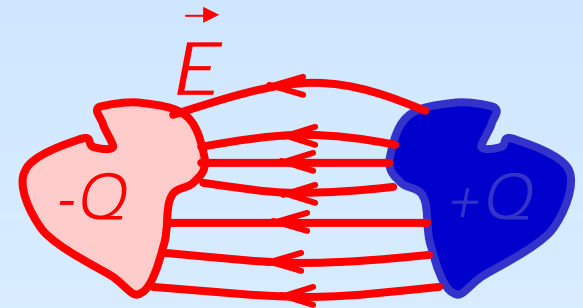
- Geleider

E via Gauss (symmetrie)
Beeldladingsmethode



Condensator

$$\frac{Q}{V} = \text{constant} \equiv C \quad \text{en} \quad U = \frac{1}{2} CV^2$$



Inhoud

Elektrostatica

1. Wet van Coulomb: vergelijking voor elektrische kracht
2. Wet van Gauss: vergelijking voor elektrisch veld
3. Veldvergelijkingen: Divergentie en Kringintegraal
4. Elektrische Potentialaal & Energie
5. Elektrische velden in materie: Geleiders
- ➔ 6. Elektrische velden in materie: Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathbf{r} / e_0$$
$$\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

Griffiths:

➤ Materie: §4 m.u.v. de moeilijke stukken!

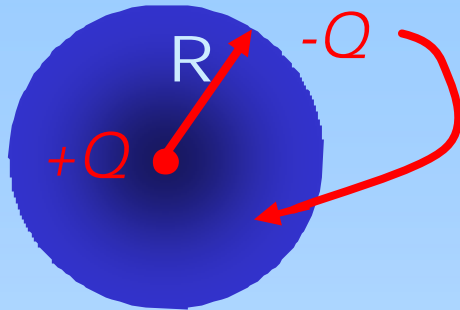
Electrische velden in di-elektrica=isolatoren

concepten

Polarisatie neutraal atoom

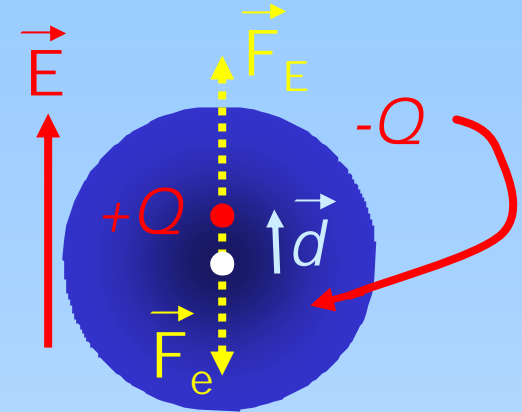
$$\vec{E} = \vec{0}$$

elektronenwolk
uniforme bol (R)



$$\vec{E} \neq \vec{0}$$

bolsymmetrisch
⇒ dipoolmoment

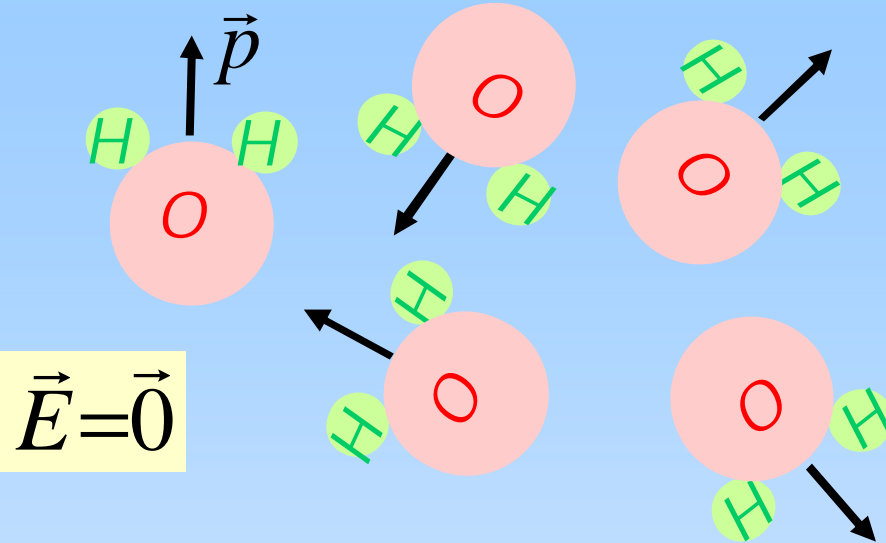


$$a \equiv \text{"polariseerbaarheid"} \quad \vec{p} \equiv Q\vec{d} \propto \vec{E} \quad \text{en} \quad \frac{|\vec{p}|}{|\vec{E}|} \equiv a$$

Kern lading

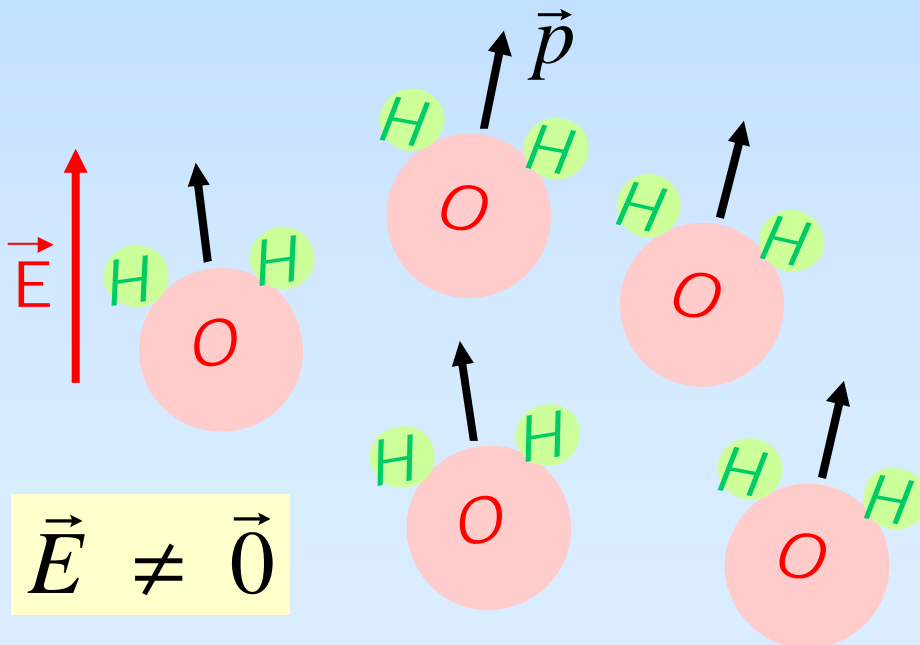
Element	Z	α/ϵ_0
Helium	2	$3 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Neon	10	$5 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Argon	18	$20 \times 10^{-30} \text{ m}^3$
Waterdamp		$500 \times 10^{-30} \text{ m}^3$

Polarisatie polair molecuul



$$\vec{E} = \vec{0}$$

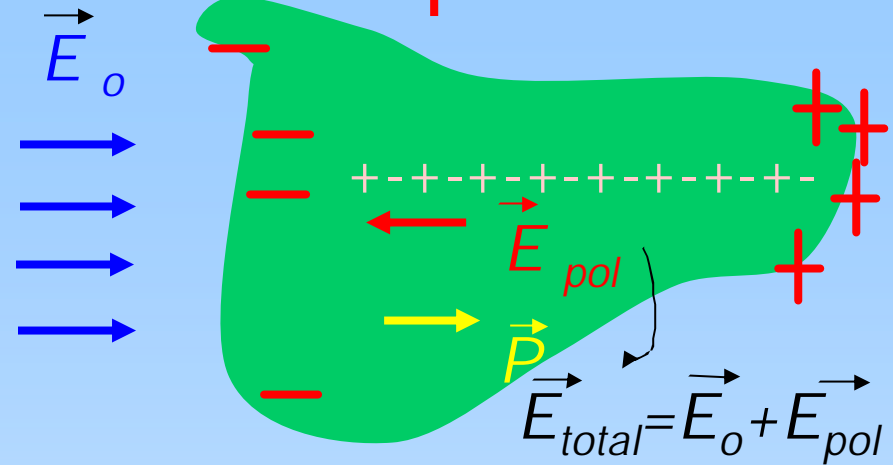
Moleculen intrinsiek dipoolmoment p
Voor $E=0$: oriëntatie p random
Voor $E \neq 0$: oriëntatie $p \parallel E$



$$\vec{E} \neq \vec{0}$$

Di-electricum Macroscopisch

Een isolator wordt door een veld, E_o , gepolariseerd (P). Dit heeft een netto 'gebonden' oppervlaktelading (s_{pol}) tot gevolg en dus een 'extra' elektrisch veld, E_{pol}



$$\vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{s}_{pol} \equiv \vec{P} \cdot \hat{n} & \leftarrow \text{Lineaire materialen; netto lading alleen op rand (dit college)} \\ \mathbf{r}_{pol} \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} & \leftarrow \text{Algemene uitdrukking (voor later)} \end{cases}$$

- Lineaire isolator \longleftrightarrow eenvoudigste relatie $E (=E_{total})$ en P

$$\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_e \vec{E} + \mathbf{s}_{pol}$$

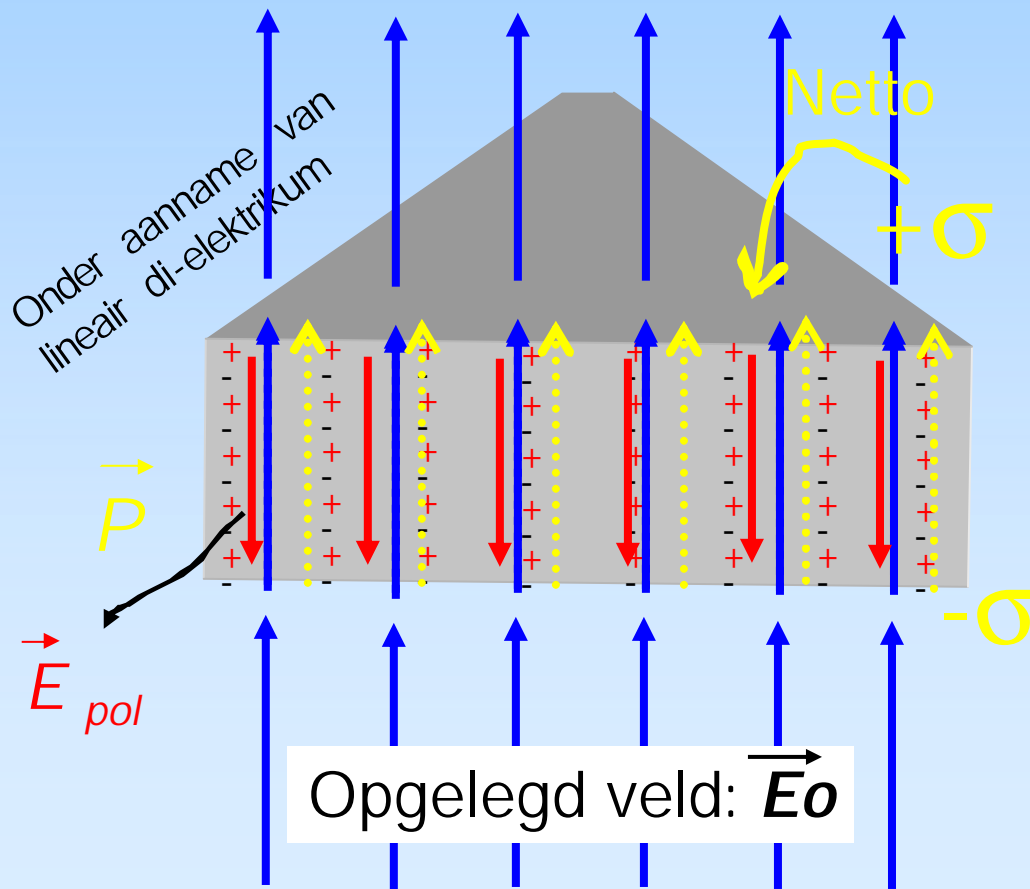
ϵ_e Elektrische susceptibiliteit = polariseerbaarheid

Polarisatie van een materiaal in \vec{E} -veld

Eenvoudigste relatie \vec{E} en \vec{P} :

$$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_e \vec{E}$$

Merk op: configuratie fysisch equivalent aan twee geladen platen. Dus gelijke relatie E veld en lading als plaatcondensator (bewijs volgt):



$$\vec{E}_{pol} = \frac{S_{pol}}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

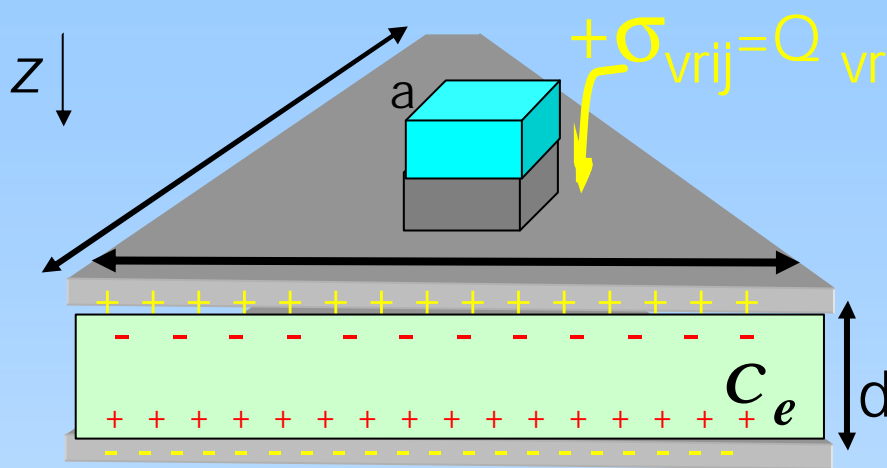
In materiaal

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{1}{\epsilon_0} (\epsilon_0 \epsilon_e \vec{E})$$

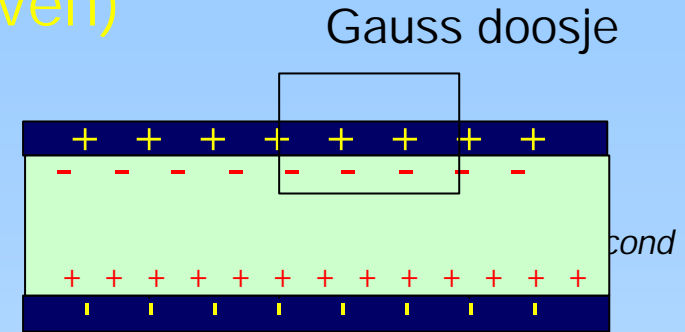
$$\vec{E} = \frac{1}{(\epsilon_e + 1)} \vec{E}_0$$

Vlakke isolator met di-electrikum (I)



$$+\sigma_{\text{vrij}} = Q_{\text{vrij}} / A \text{ (gegeven)}$$

Vrije lading
Gebonden lading
Vrije lading



$$E_{\text{cond}} = E_{\text{boven}} + E_{\text{onder}}$$

$$E_{\text{cond}} = 2E_{\text{boven}}$$

'Lege' plaatcondensator:

$$2aE_{\text{boven}} = \frac{aS_{\text{vrij}}}{e_0} \text{ @ } 2E_{\text{boven}} = \frac{S_{\text{vrij}}}{e_0} \text{ P}$$

$$E_{\text{cond}} = \frac{S_{\text{vrij}}}{e_0}$$

$$V = \int_0^d dz E_{\text{cond}} = \frac{dS_{\text{vrij}}}{e_0} = \frac{dQ_{\text{vrij}}}{e_0 A}$$

$$C = Q_{\text{vrij}} / V = \frac{e_0 A}{d}$$

Met di-electrikum →

veld in condensator veranderd

$$E_{\text{cond}} = \frac{1}{1+C_e} E_{\text{vrij}} = \frac{1}{(1+C_e)} \frac{S_{\text{vrij}}}{e_0}$$

$$V = \frac{1}{(1+C_e)} \frac{dQ_{\text{vrij}}}{e_0 A}$$

$$C = Q_{\text{vrij}} / V = (1+C_e) \frac{e_0 A}{d} = e_0 \frac{A}{d}$$

$$C = (1+C_e) C_{\text{vacuum}}$$

DEMO: Plaatcondensator met dielektricum



DIELEKTRICUM IN CONDENSATORRUIMTE

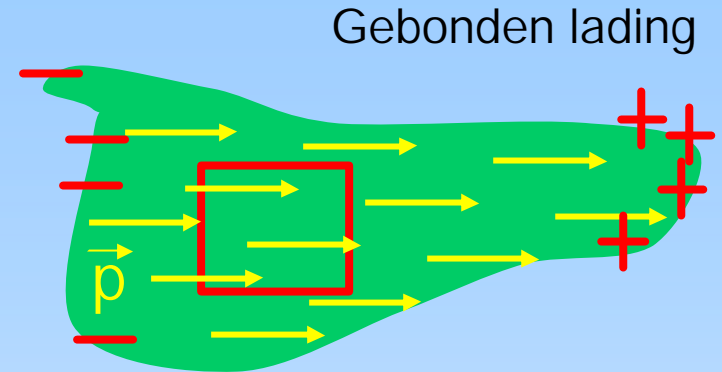
Een plaatcondensator is verbonden met een elektroscop. De condensator wordt opgeladen. Door het inbrengen van een polariseerbaar medium in de condensatorruimte wordt de capaciteit vergroot, waardoor de spanning afneemt.

VI: Wat heb ik geleerd?

Materialen:

- Isolator

$$\vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{s}_{\text{pol}} \equiv \vec{P} \cdot \hat{n} \\ \mathbf{r}_{\text{pol}} \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \end{cases}$$



- Eenvoudigste relatie E en P :

$$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 c_e \vec{E}$$

Polarisatie in materie verkleint E veld:

Plaatcondensator

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{cond}} &= \frac{1}{1+c_e} \mathbf{E}_{\text{vrij}} = \frac{1}{(1+c_e)} \frac{\mathbf{S}_{\text{vrij}}}{\epsilon_0} \\ \mathbf{C} &= (1+c_e) \mathbf{C}_{\text{vacuum}} \end{aligned}$$

De elektrische verschuiving \vec{D}

E -veld wordt bepaald door totale ladingsverdeling. Daarom beschouwen het E -veld ten gevolge van vrije lading en gebonden (of polarisatie) lading.

Voor E -veld (divergentie stelling):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\mathbf{r}_{\text{totaal}}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mathbf{r}_{\text{vrij}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{r}_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{r}_{\text{vrij}}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{r}_{\text{vrij}} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

\vec{D} is een 'hulpveld' om rekenen makkelijker te maken! D hangt alleen van vrije lading af en bepaal je bij voorkeur met Gauss.

$$\mathbf{r}_{\text{vrij}} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \mathbf{c}_e \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\mathbf{r}_{\text{vrij}} = (\epsilon_0 + \epsilon_0 \mathbf{c}_e) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\mathbf{r}_{\text{vrij}} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\Rightarrow \epsilon \vec{E} = \vec{D} \quad \text{en dus} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{c}_e}{\epsilon} \vec{D}$$

Gevolg:

het uiteindelijke E -veld ten gevolge van vrije ladingen en gepolariseerde (lineaire) materialen hangt alleen en slechts alleen af van de vrije ladingen!

En de polarisatie P dus ook.

Voor liefhebbers!

Vlakke isolator met di-electrikum (II)

Eenvoudigste relatie E en P:

$$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 c_e \vec{E}$$

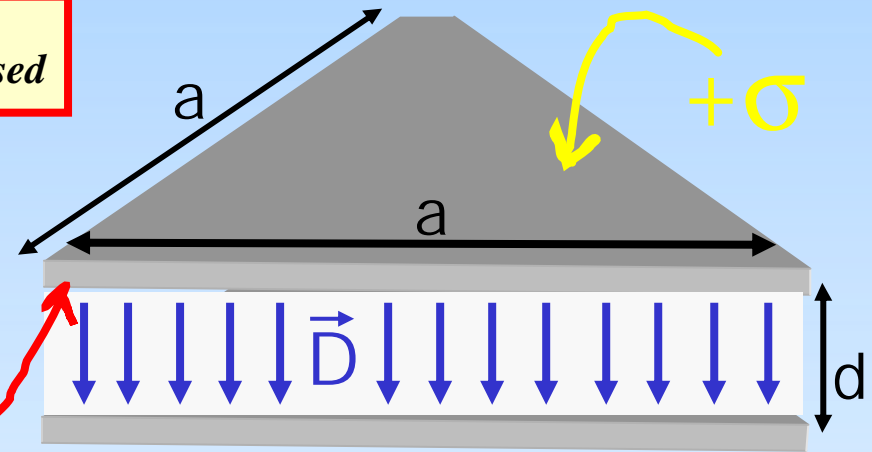
Nu volgt overal E uit D:

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 c_e \vec{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + c_e) \vec{E} \equiv \mathbf{e} \vec{E} \text{ met } \mathbf{e} \equiv \epsilon_0 (1 + c_e) \end{aligned}$$

Gebruik $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \mathbf{r}_{\text{vrij}}$ of $\oint \vec{D} \times d\vec{o} = Q_{\text{vrij-enclosed}}$

Dus E via D via Gauss: $D_{\text{plaat}} = \frac{S}{2}$

$$D_{\text{cond}} = 2 D_{\text{plaat}} = S \quad \vec{P} \quad E_{\text{cond}} = \frac{D_{\text{cond}}}{\mathbf{e}} = \frac{S}{\mathbf{e}}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= \vec{P} \cdot \hat{n} \\ &= -\epsilon_0 \chi_e E_{\text{cond}} \end{aligned}$$

Capaciteit $c = \frac{Q}{V}$:

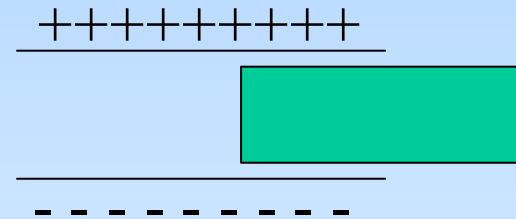
$$C_{\text{isolator}} = C_{\text{vakuum}} (1 + c_e)$$

Voor liefhebbers!

Discussievraag 6

Een diëlektrische plaat bevindt zich voor de helft in een geladen condensator. De condensator is geïsoleerd van de omgeving. Op de plaat werkt:

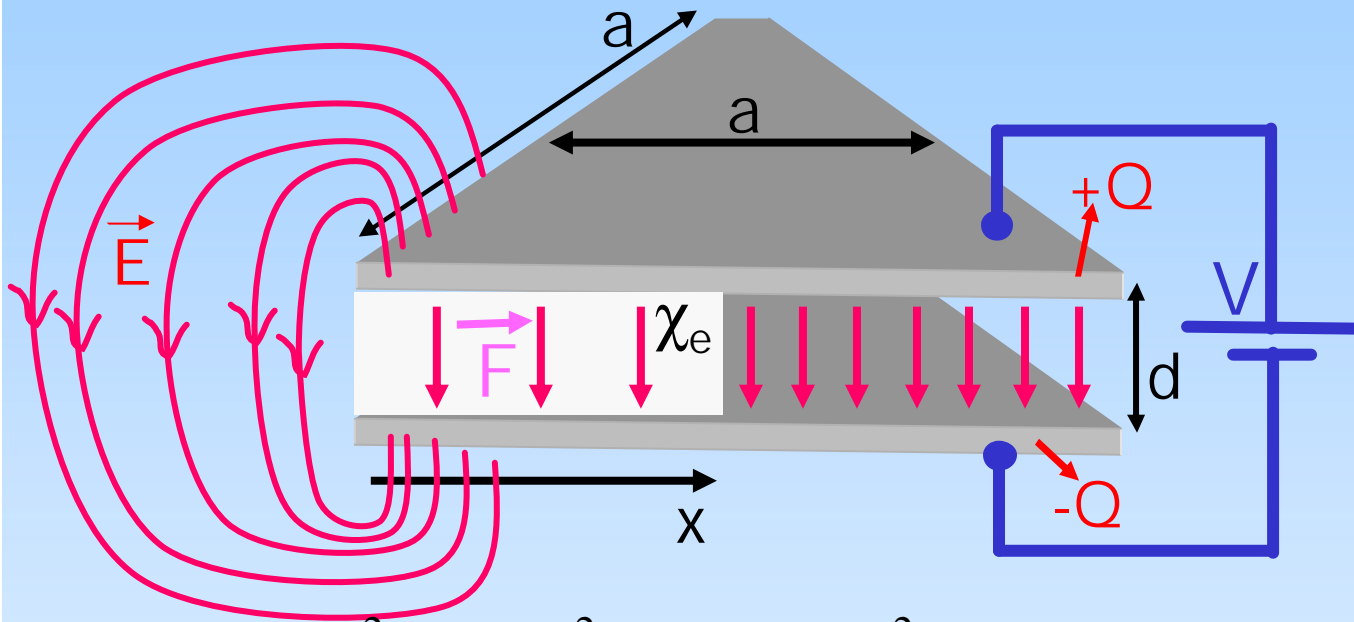
- A** geen kracht
- B** een kracht naar links
- C** een kracht naar rechts



Isolatoren: energie en kracht

Vacuüm: $U = \frac{1}{2} C_{\text{vacuum}} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{vacuum}}}$

Isolator: $U \rightarrow U = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_e) C_{\text{vacuum}} V^2$



$$C(x) = \frac{a^2 \epsilon_0}{d} + \frac{ax \epsilon_0 \epsilon_e}{d}$$

Gevraagd:

- Kracht F op isolator

Aanpak:

1. Via $U(x) \Rightarrow F = -dU/dx$

Opties:

A. Q constant

B. V constant (lastig!)

$$A: \Delta U = \Delta \frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{a \epsilon_0 \epsilon_e}{d} \Delta x \Rightarrow F \equiv -\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{a \epsilon_0 \epsilon_e}{d}$$

Condensator
Batterij doet werk!

Voor liefhebbers!

$$B: \Delta U = \Delta \frac{CV^2}{2} - \Delta(QV) = \frac{V^2}{2} \Delta C - V^2 \Delta C = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{a \epsilon_0 \epsilon_e}{d}$$

Practicum Electrostatica

Toets de theorie!

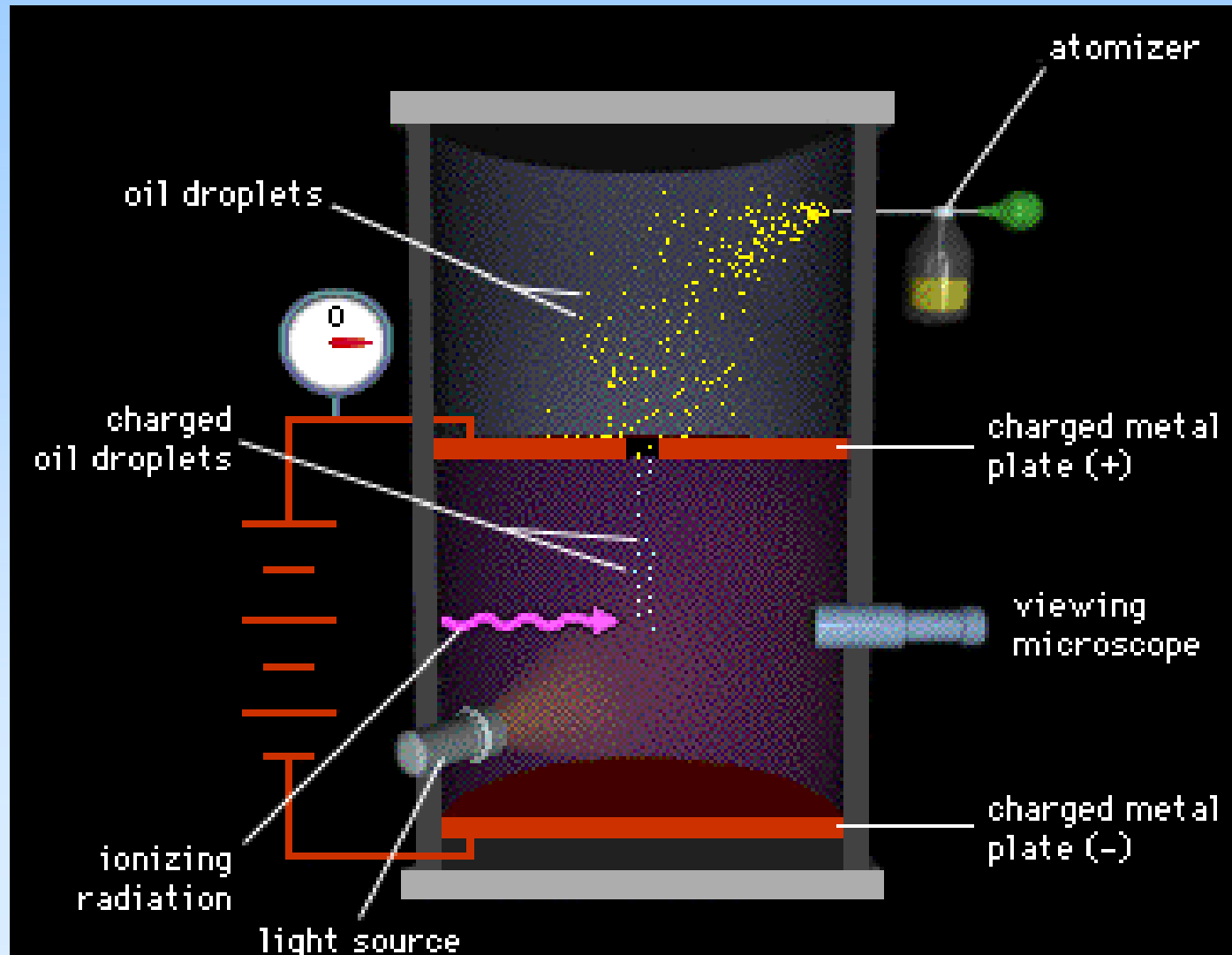
Keuze uit 1+2 of 1+3.

1. **Millikan** → quantisatie van lading. (verslag)
2. De **Plaatcondensator** & Potentiaal en Veld van een **lijnloading**.
(2 x labjournaal)
3. De **spiegellading** → moeilijk. (labjournaal)

Zie de college webpage voor meer documentatie

Quantisatie elektrische lading

<http://www.sciencejoywagon.com/physicszone/lesson/07elecst/millikan/millikan.htm>

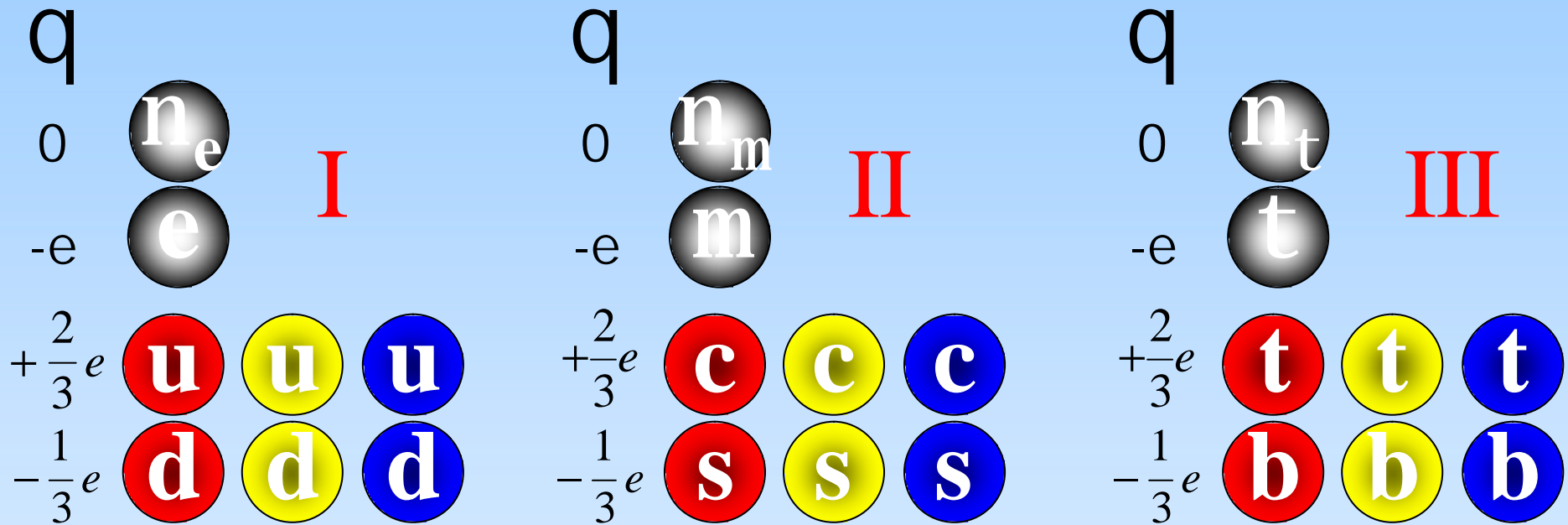


©1998 Encyclopaedia Britannica, Inc.

PRAKTICUM: Millikan



De elementaire deeltjes



Opmerking: ieder quark komt voor in drie "kleuren:

rood
geel
blauw

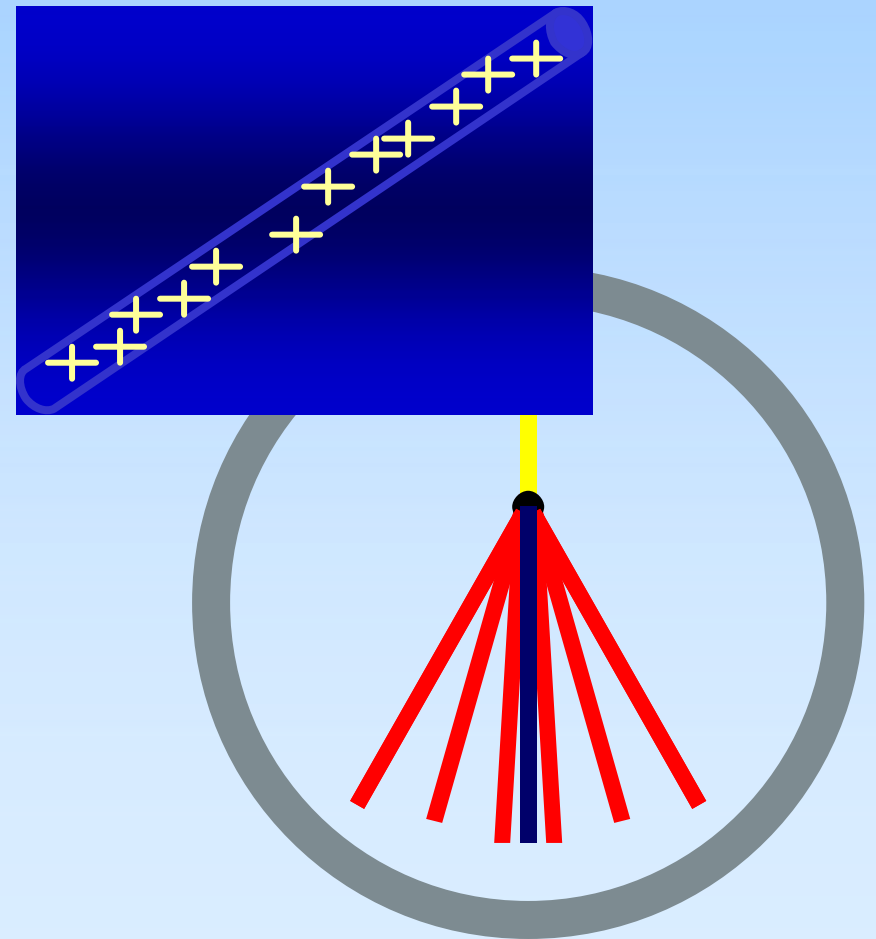
"Ontdekking" kosmische straling

Voor
liefhebbers!

*Een opgeladen elektroscopie
ontlaadt spontaan op zeeniveau*



Theodor Wulf: 1909
(Nederlandse priester!)

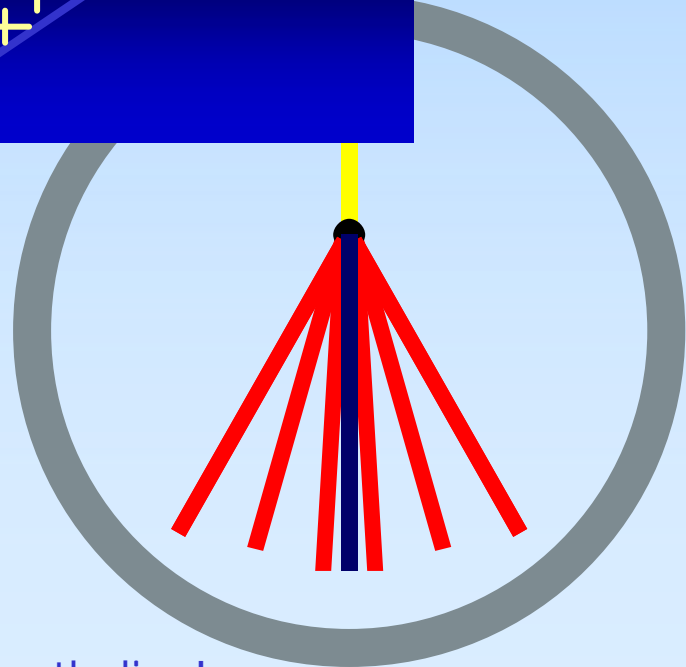
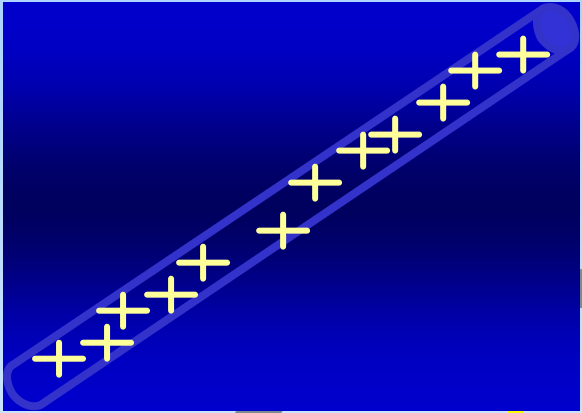


"Ontdekking" kosmische straling

Voor
liefhebbers!



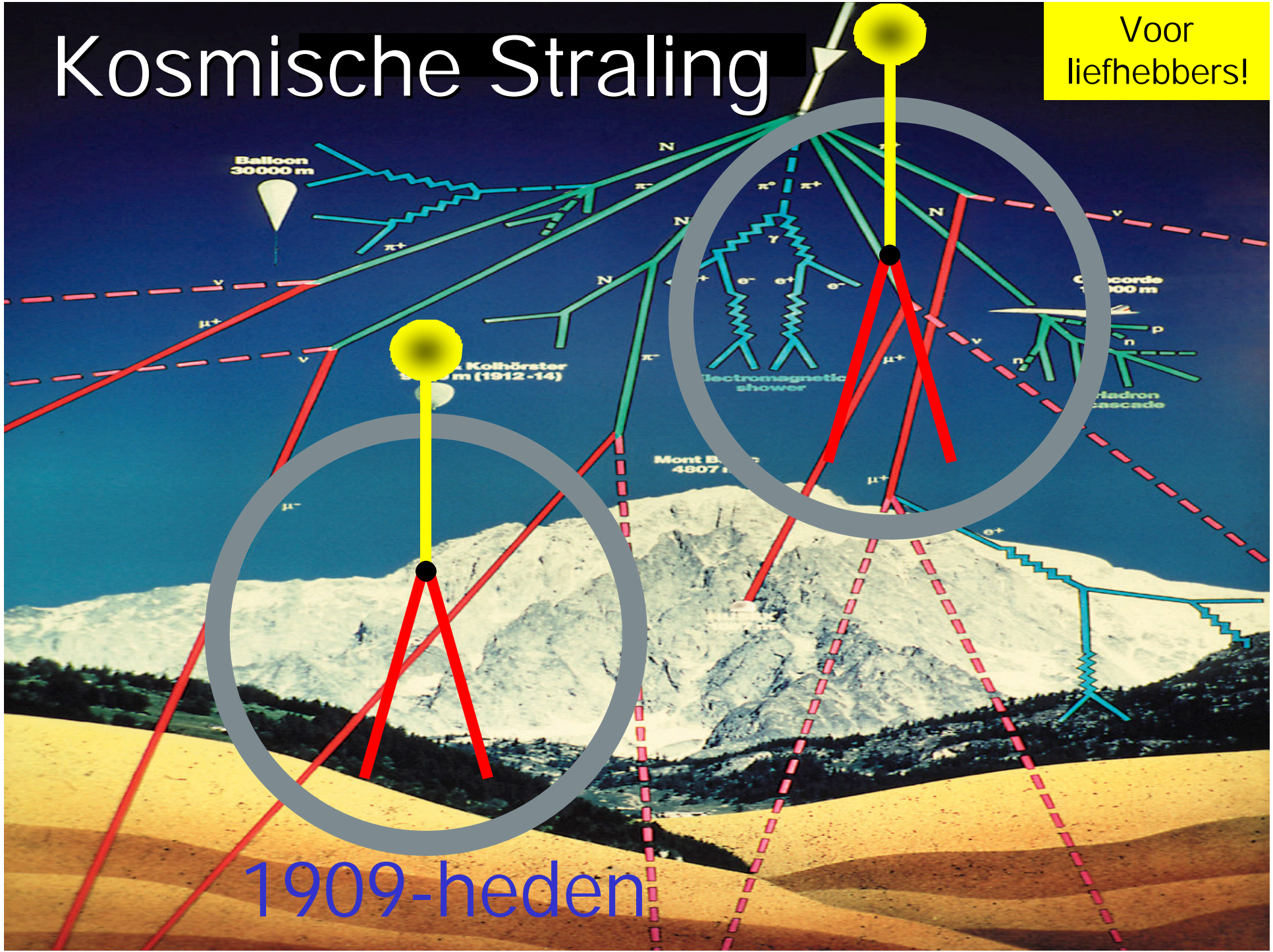
*Op het topje v/d Eiffel toren
ontlaadt een elektroscop zich ook;
en nog sneller dan op zeeniveau!*



Victor Hess (1912)
Onder luchtballon nog snellere ontlading!

Kosmische Straling

Voor liefhebbers!



1909-heden