Komt er uit wat er uit zou moeten komen?

a) Het electrisch veld buiten een homogeen geladen bol met totale lading Q is hetzelfde als dat van een puntlading Q in het middelpunt van de bol:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \text{ met } Q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

b) Volgens de wet van Gauss in differentiële vorm zou er uit de divergentie van $\vec{E}(\vec{r})$ de dichtheid ter plaatse $\vec{r}$ gedeeld door ϵ_0 moeten komen. Voor $r > R$ geld dat de dichtheid nul is, dus zal $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ook nul opleveren.

c) Expliciet $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ uitrekenen geeft:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\partial}_r\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \end{aligned}$$

We mogen $\vec{\nabla}$ als $\vec{\partial}_r$ schrijven omdat $\vec{E}$ alleen van r afhangt! Als we in ons achterhoofd houden dat $\vec{\partial}_r \cdot \vec{r} = 3$ en $\vec{\partial}_r r = \hat{r}$, dan gaat de berekening als volgt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3\vec{\partial}_r \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{\partial}_r(r^3)}{r^6} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3r^3 - \vec{r} \cdot 3r^2\vec{\partial}_r r}{r^6} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3r^3 - 3r^2\vec{r} \cdot \hat{r}}{r^6} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 \end{aligned}$$

e) (of d)) Gegeven het electrisch veld $\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R}r^2\right)\hat{r}$, bereken de ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ voor $r < R$. Dit doen we door de divergentie van het electrisch veld te nemen:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 \vec{\partial}_r \cdot \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R}r^2\right)\hat{r} \\ &= \epsilon_0 \vec{\partial}_r \cdot \left(\frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r\vec{r}}{4\epsilon_0 R}\right) \\ &= \rho_0 \left(\frac{\vec{\partial}_r \cdot \vec{r}}{3} - \frac{\vec{\partial}_r \cdot (r\vec{r})}{4R}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_0 \left(\frac{3}{3} - \frac{(\vec{\partial}_r r) \cdot \vec{r} + r \partial_r \cdot \vec{r}}{4R} \right) \\
&= \rho_0 \left(1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r} + 3r}{4R} \right) \\
&= \rho_0 \left(1 - \frac{r + 3r}{4R} \right) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)
\end{aligned}
$$