Ladingsverdeling en totale lading

a) Voor een volume met uniforme ladingsdichtheid ρ geldt voor de totale lading Q

$$Q = \int_V \rho dV$$

Voor een bol met straal R is het het handigst om de integraal in bolcoördinaten uit te rekenen, met $dV = r^2 sin(\theta) dr d\theta d\phi$:

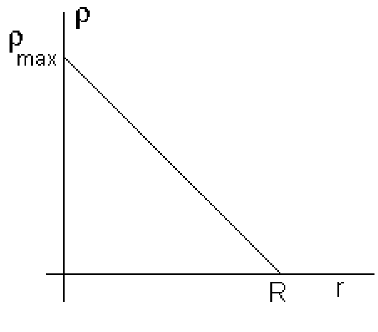
$$Q = \int_V \rho \ r^2 sin(\theta) \ dr d\theta d\phi = \rho \int_0^R r^2 \ dr \int_0^\pi sin(\theta) \ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

waar we ρ voor de integraaltekens mogen zetten aangezien ρ uniform is, dwz niet van r, θ of ϕ afhangt. Het uitvoeren van de integraal mag niet al te veel moeite kosten:

$$Q = \rho \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2 \ \pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

c) De functie van $\rho(r)$ geeft ρ_{max} voor $r = 0$ en 0 als $r = R$:

$$\rho(r) = \rho_{max}(1 - \frac{r}{R})$$



d) Nu is $\rho(r)$ *niet* meer uniform en moet hij wel meegenomen worden in de r-integratie:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^R \rho_{max}(1 - \frac{r}{R}) r^2 \ dr \int_0^\pi sin(\theta) \ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \rho_{max} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{R} \right) \\
&= 4\pi \rho_{max} \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R} \right]_0^R \\
&= 4\pi \rho_{max} \frac{1}{12} R^3 = \frac{1}{3} \pi \rho_{max} R^3
\end{aligned}$$